情報論理の壺２

萩谷

2.1(e)

命題論理のコンパクト性

無限

命題記号も無限個

- 命題論理式の集合Γが充足可能であるとは、ある解釈のもとでΓのすべての論理式が真。
- Γが有限ならば、充足可能性は判定できる。
  - すべての解釈を網羅すればよい。
- Γの任意の有限部分集合が充足可能であるとき、Γは無矛盾であるという。
- 命題論理のコンパクト性

  Γは充足可能 ⇔Γは無矛盾

同時に

2.1(e)

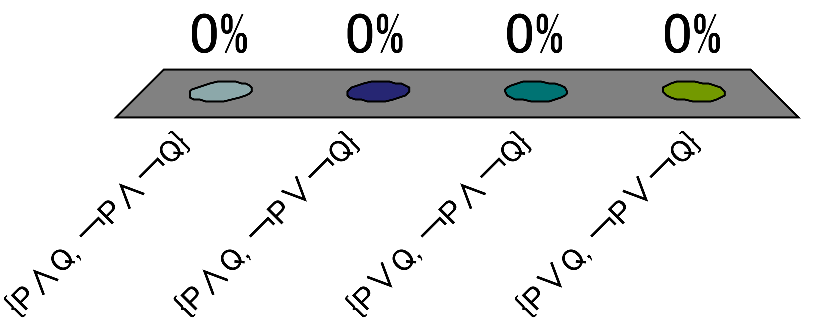
Γが有限の場合

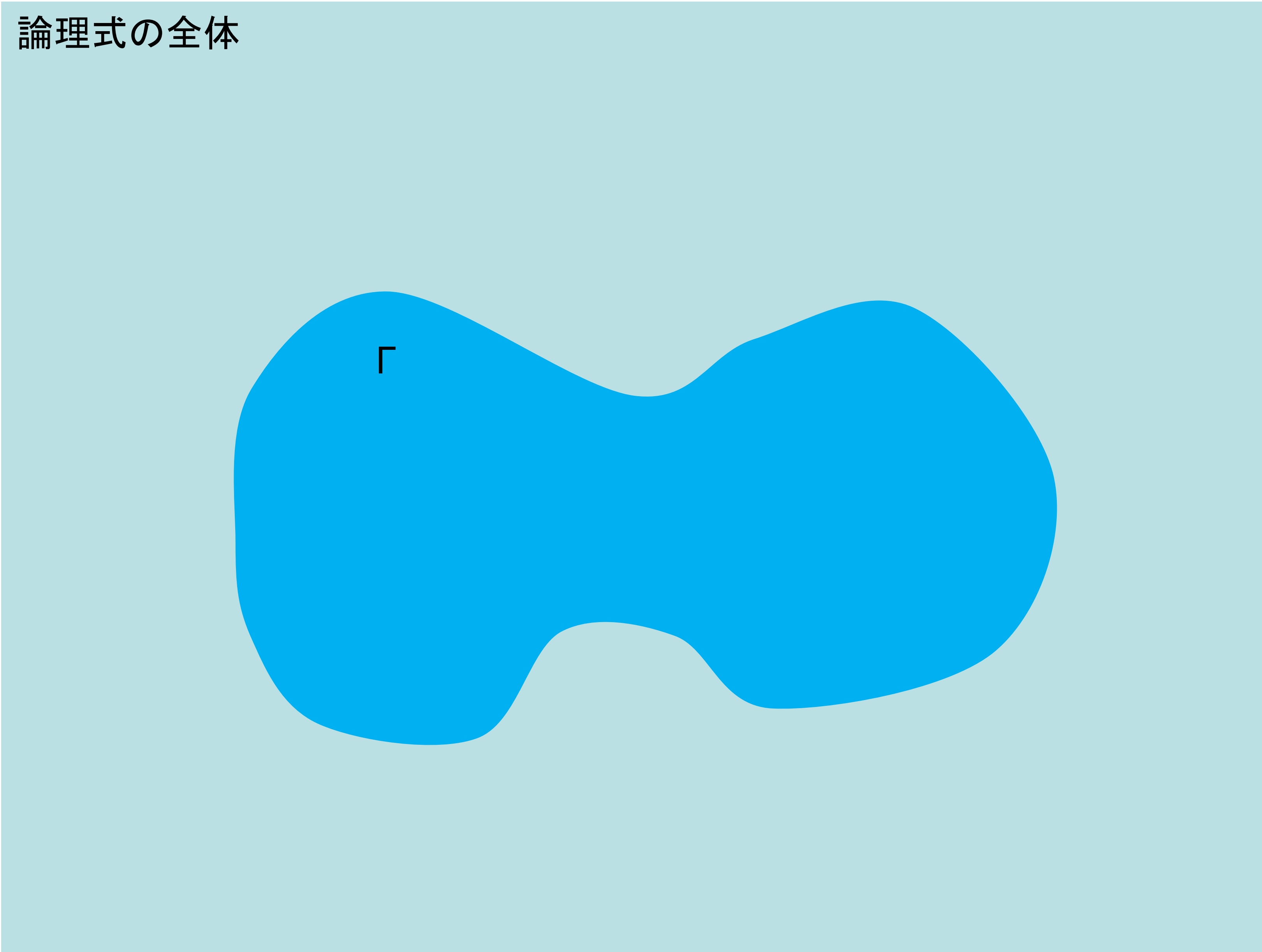
- $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ ならば、
  Γ が充足可能であることと、
  $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ が充足可能であることは、
  等価。

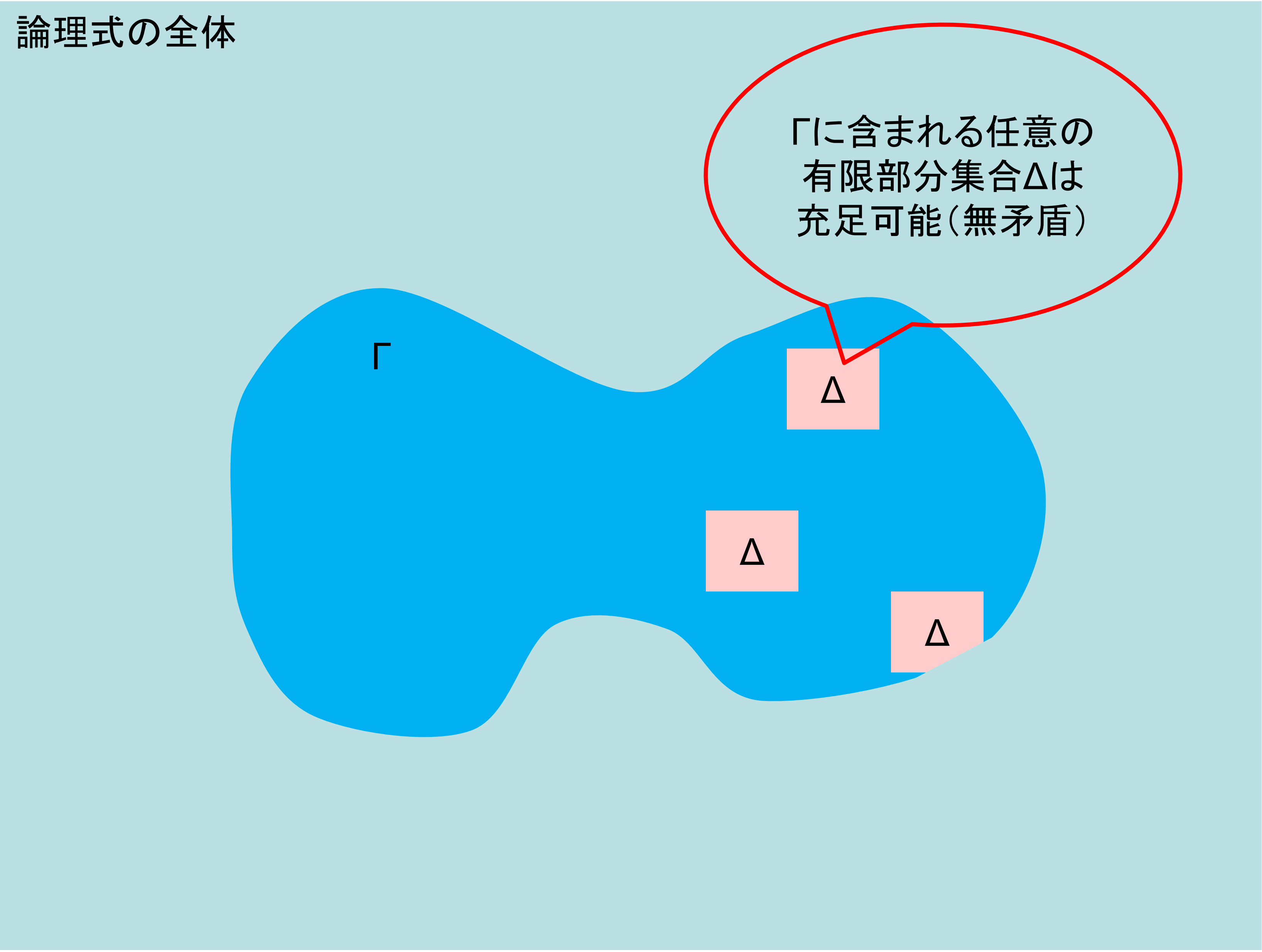
以下、面倒なので、
メタ変数にも同じ
フォントを使う。

充足可能なのは

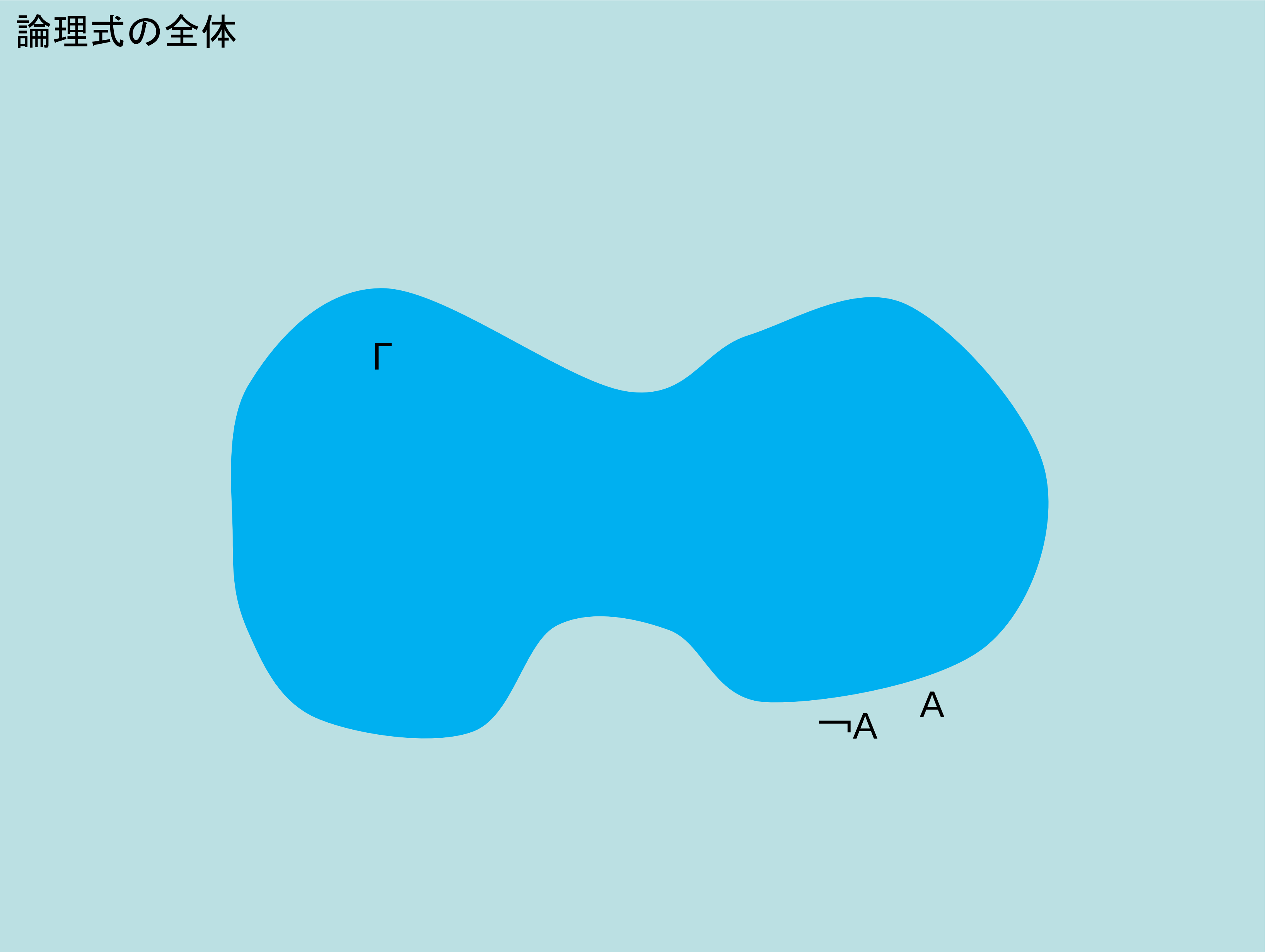
1. $\{P \land Q, \neg P \land \neg Q\}$
2. $\{P \land Q, \neg P \lor \neg Q\}$
3. $\{P \lor Q, \neg P \land \neg Q\}$
4. $\{P \lor Q, \neg P \lor \neg Q\}$

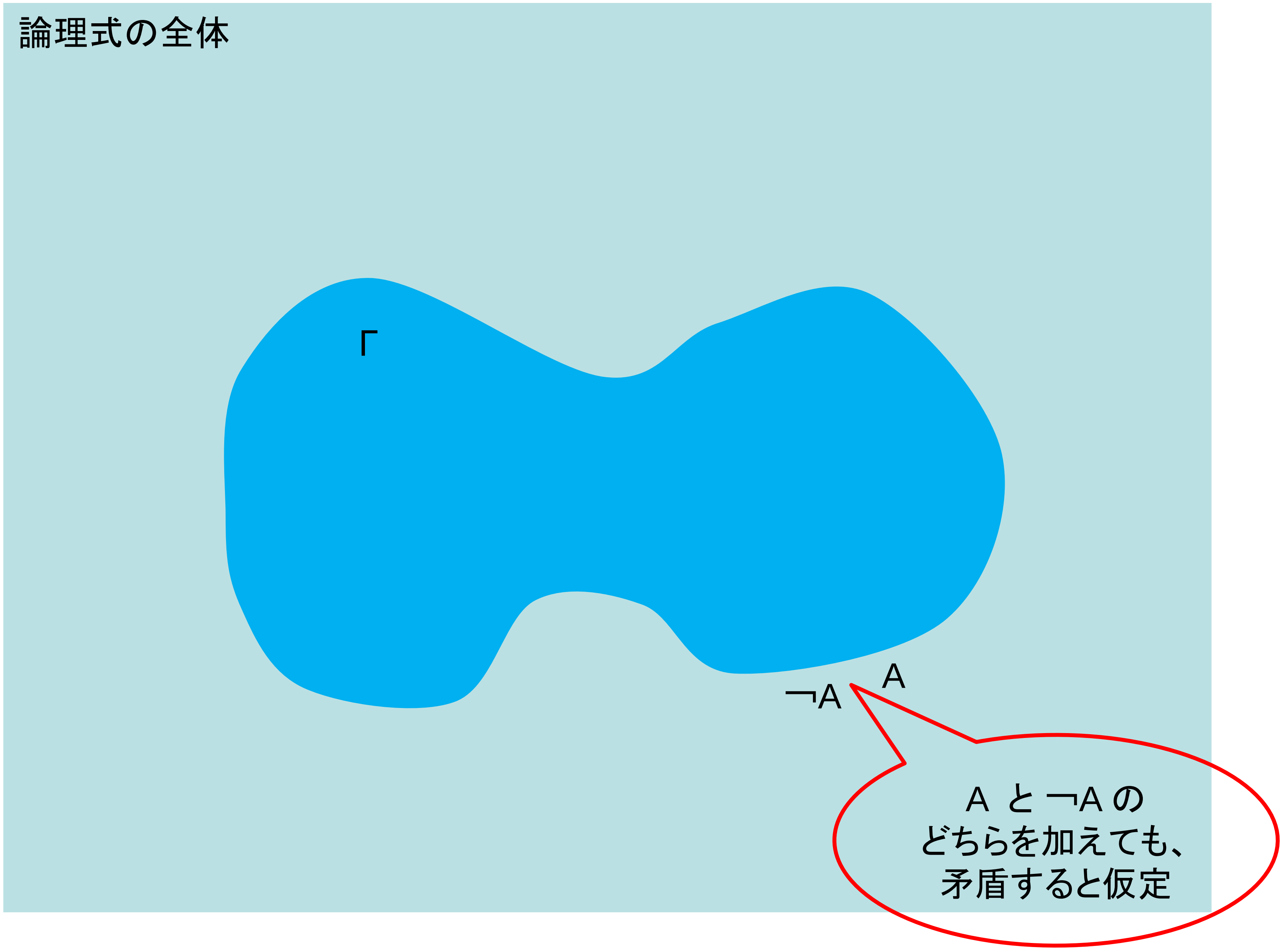


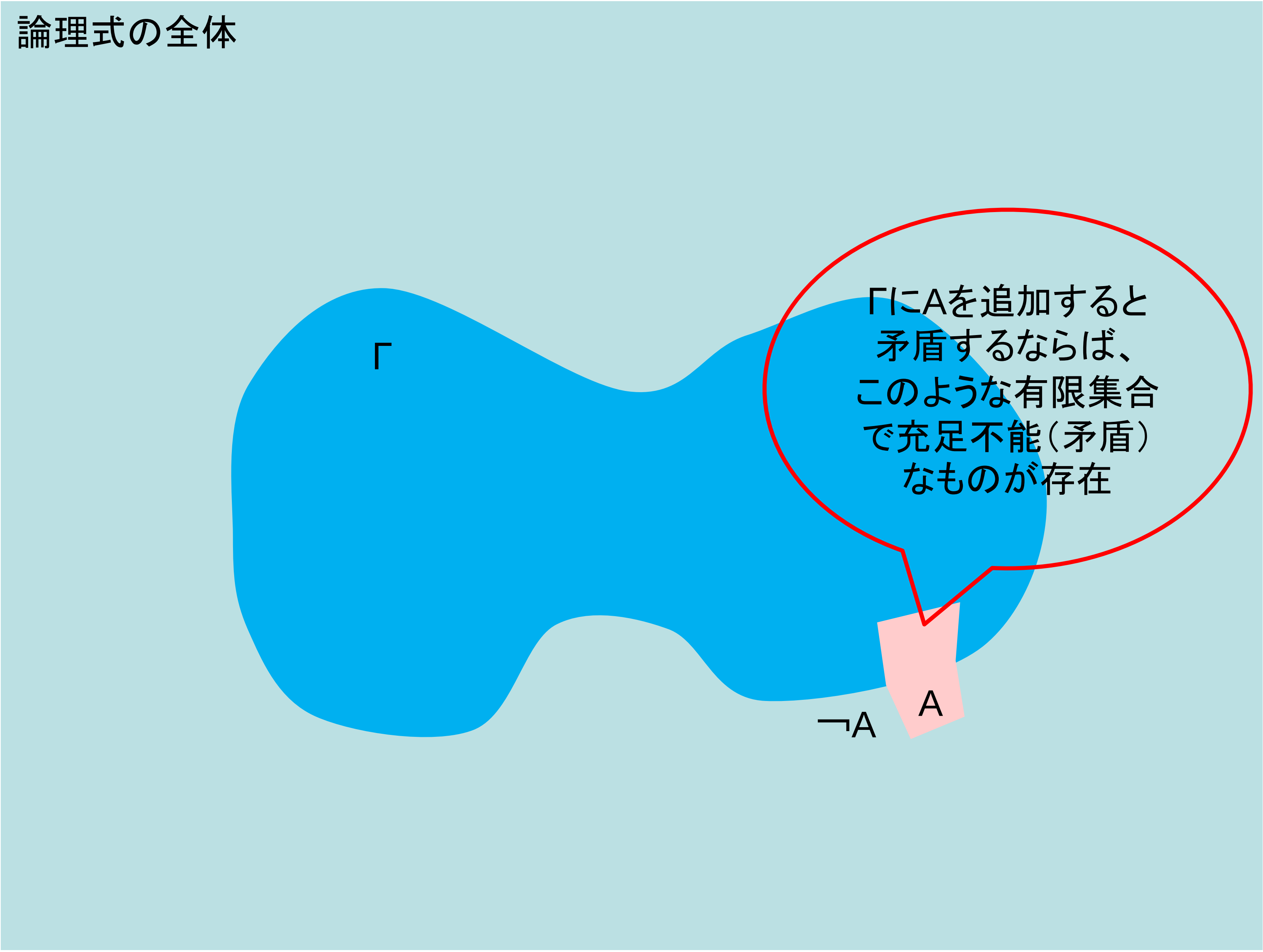

論理式の全体
「



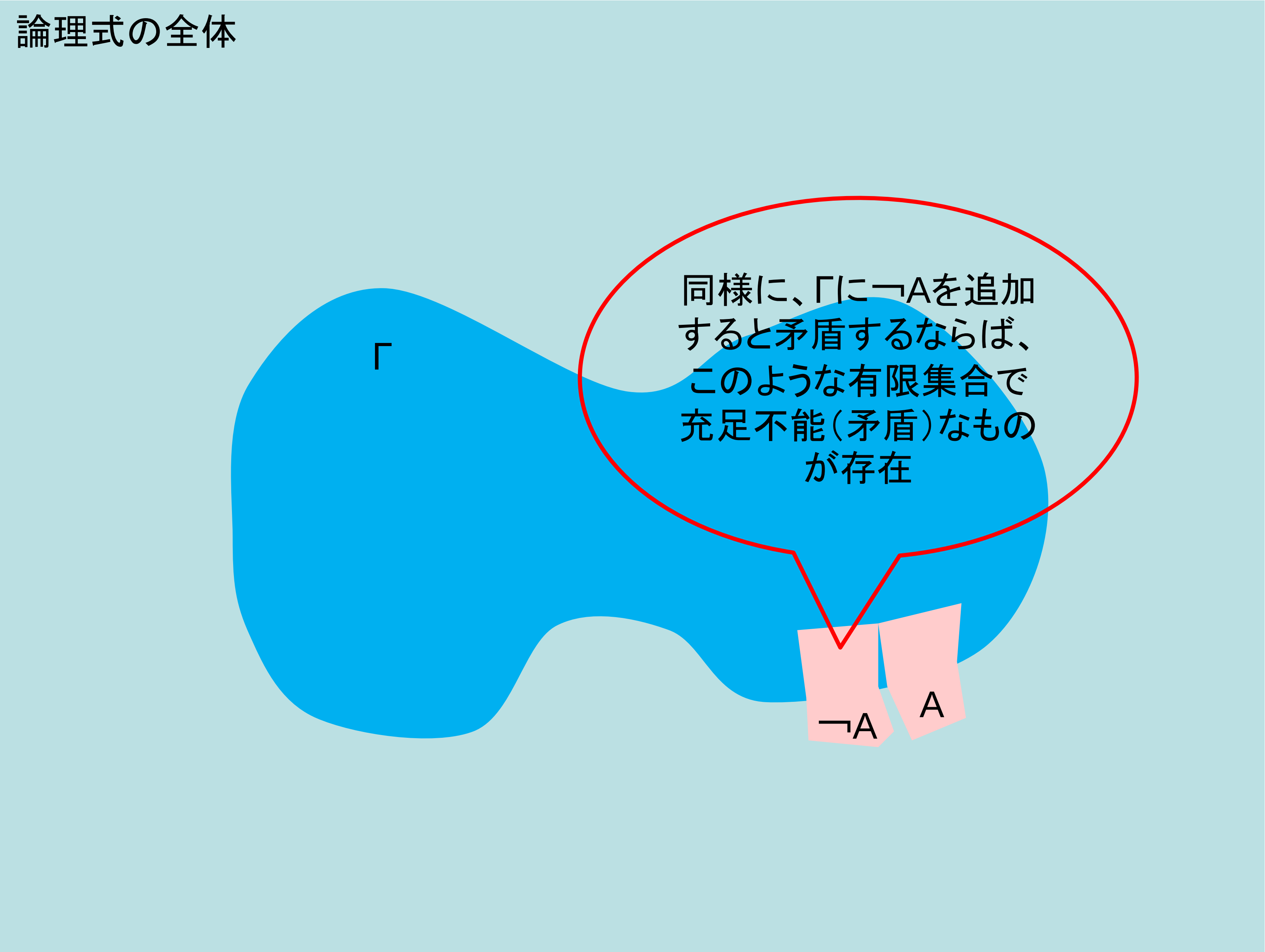
論理式の全体
Γに含まれる任意の
有限部分集合Δは
充足可能(無矛盾)
Γ
Δ
Δ
Δ

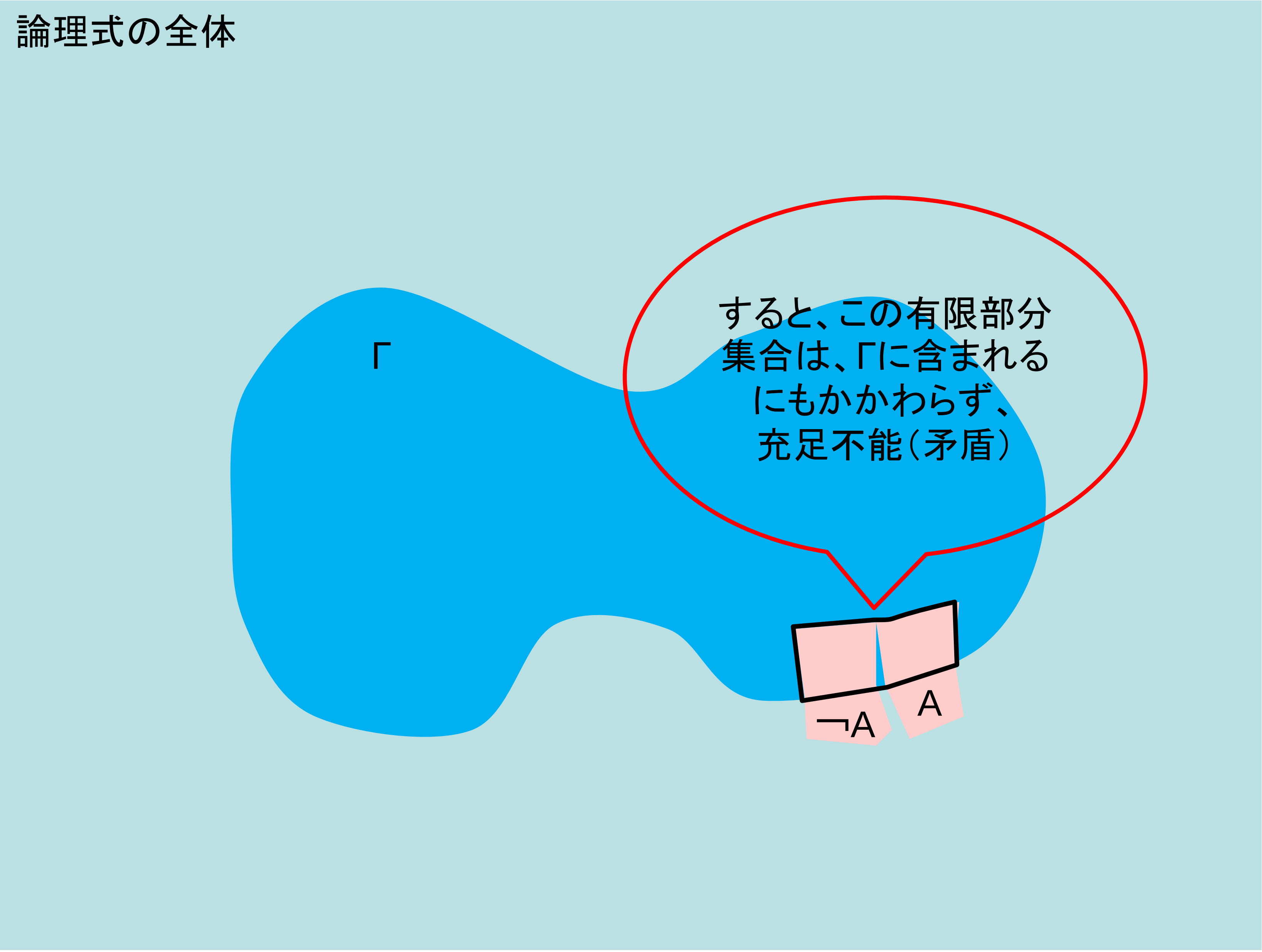

論理式の全体
Γ
¬A
A


論理式の全体
Γ
A
¬A
A と ¬A の
どちらを加えても、
矛盾すると仮定



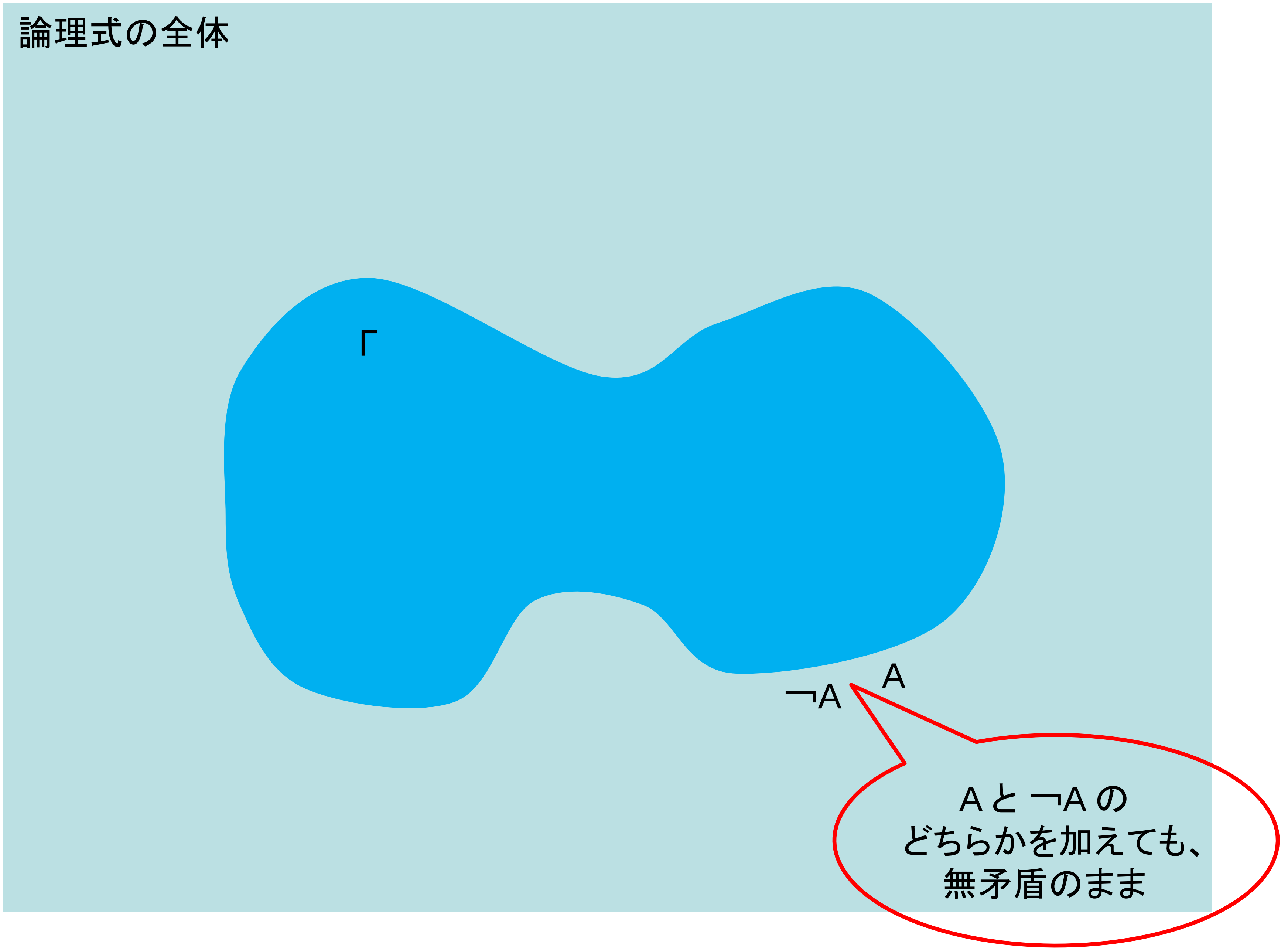
論理式の全体
Γ
ΓにAを追加すると
矛盾するならば、
このような有限集合
で充足不能(矛盾)
なものが存在
A
¬A


論理式の全体
Γ
同様に、Γに¬Aを追加
すると矛盾するならば、
このような有限集合で
充足不能（矛盾）なもの
が存在
¬A
A


論理式の全体
Γ
すると、この有限部分
集合は、Γに含まれる
にもかかわらず、
充足不能（矛盾）
¬A
A

次のことを示せ。

A∧B と ¬A∧C が充足不能ならば、
B∧C も充足不能である。


論理式の全体
Γ
A
¬A
A と ¬A の
どちらかを加えても、
無矛盾のまま

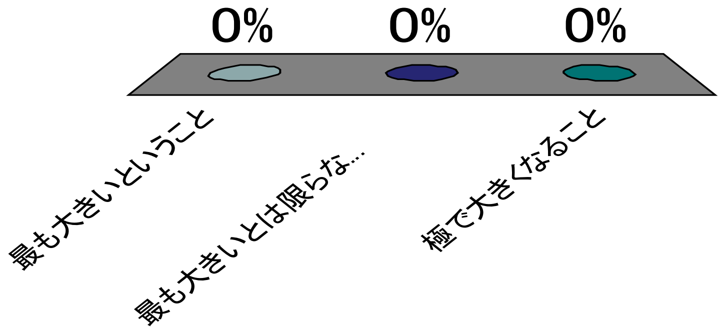
コンパクト性の意義と導出

2.1(e)

- 有限部分が(個別に)充足可能ならば、
全体を(同時に)充足する解釈が存在する。
- コンパクト性はどのようにして導かれるか。
  - 無矛盾なΓから始めて、
Γに属さない各論理式Aについて、
無矛盾性を保ちつつ、Aまたは¬Aを加える。
  - この手続きは止まらないが、極限として、
Γを含む極大な無矛盾集合Γ*が得られる。
  - 任意の論理式Aについて、Aまたは¬AがΓ*に属する。
  - Γ*に属する命題記号を真にする解釈は、
Γ*そしてΓを充足する。
  - Γが非可算の場合はZornの定理を用いる。

極大とは

1. 最も大きいということ
2. 最も大きいとは限らないが、それよりも大きいものがないということ
3. 極で大きくなること



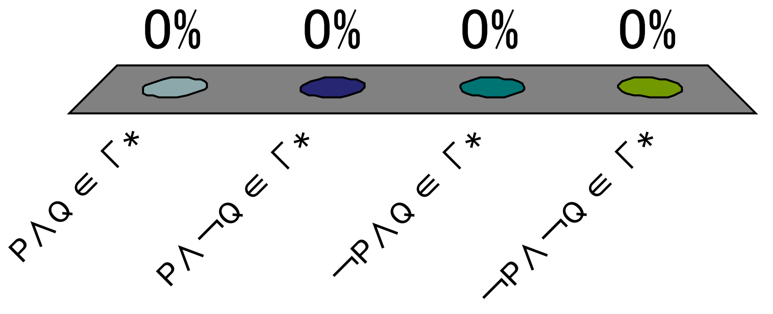
極大な無矛盾集合

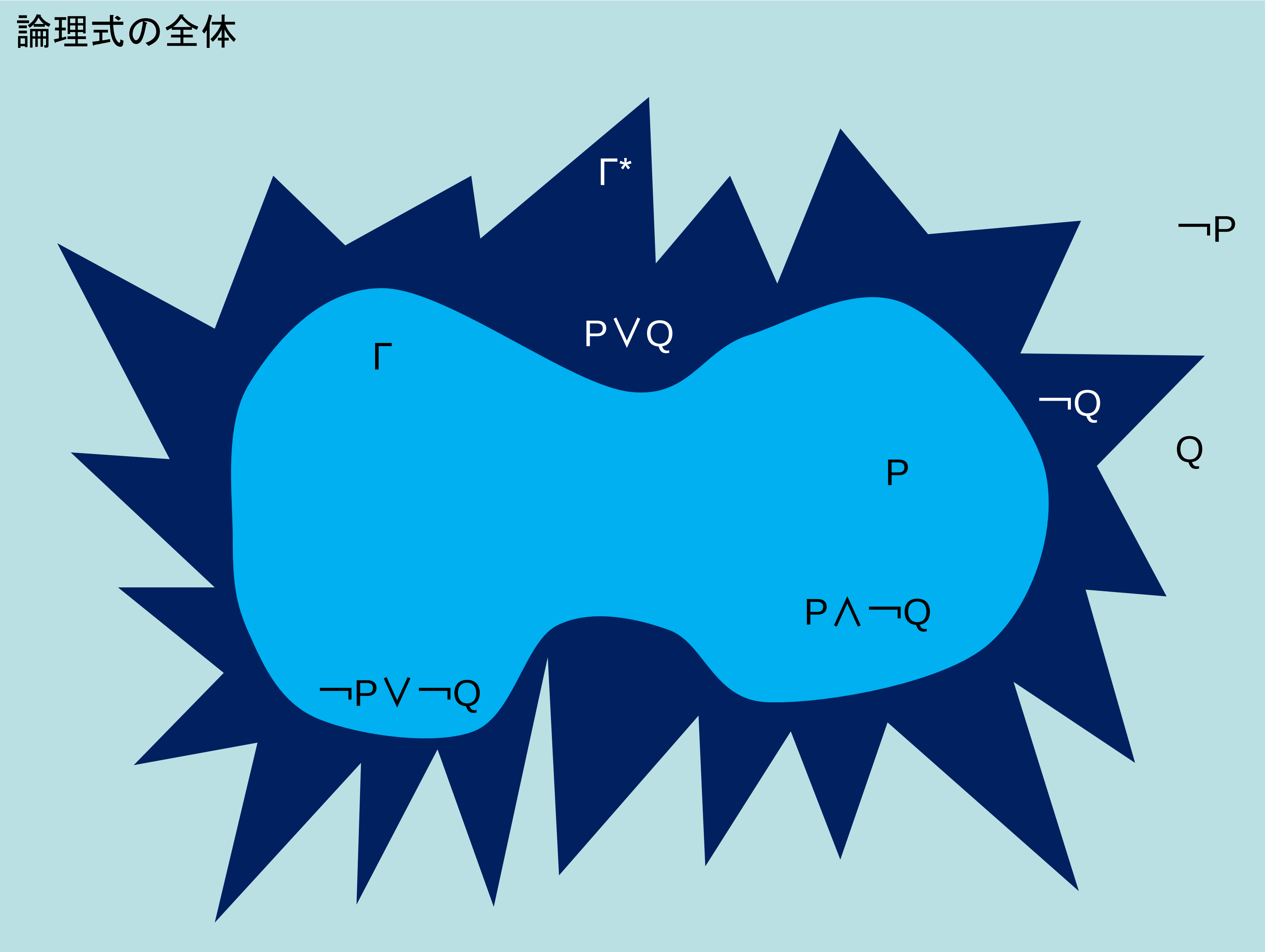
2.1(e)

- Γ*が極大な無矛盾集合であるとは、
  - Γ* は無矛盾集合である。
  - Γ*⊂Γ' かつ Γ*≠Γ' であるような
    無矛盾集合 Γ' は存在しない。
- Γ*が極大な無矛盾集合ならば、
  - 任意の論理式Aについて、
    Aまたは¬AがΓ*に属する。
    - 両方入っていなければ、どちらかを追加できてしまう。
  - ただし、Aと¬Aの両方がΓ*に入ることはない。
    - 両方入っていると矛盾してしまう。

$P \in \Gamma^*$ かつ $\neg Q \in \Gamma^*$ ならば

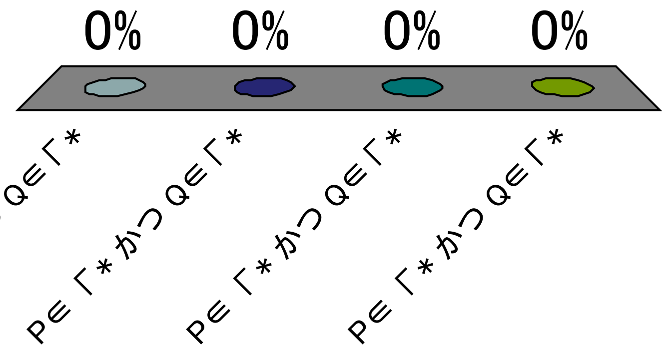
1. $P \land Q \in \Gamma^*$
2. $P \land \neg Q \in \Gamma^*$
3. $\neg P \land Q \in \Gamma^*$
4. $\neg P \land \neg Q \in \Gamma^*$




論理式の全体
Γ*
¬P
P∨Q
Γ
¬Q
Q
P
P∧¬Q
¬P∨¬Q

$P \land \neg Q \in \Gamma^*$ ならば

1. $P \in \Gamma^*$ かつ $Q \in \Gamma^*$
2. $P \in \Gamma^*$ かつ $Q \notin \Gamma^*$
3. $P \notin \Gamma^*$ かつ $Q \in \Gamma^*$
4. $P \notin \Gamma^*$ かつ $Q \notin \Gamma^*$



A∧B がΓ*に入っているならば、AもBもΓ*に入ることを示せ。

Aが入っていないとすると、

¬Aが入るはず…

A∨B がΓ*に入っているならば、AかBがΓ*に入ることを示せ。

AもBも入っていないとすると、

¬Aも¬Bも入るはず…

極大な無矛盾集合から作られる解釈

2.1(e)

- Γ*が極大な無矛盾集合であるとき、
  Γ*に属する命題記号を真にする
  という解釈を考える。
- この解釈は、Γ*に属する任意の論理式を
  真にする。（属さない論理式は偽にする。）
  - 論理式の大きさ（構造）に関する帰納法
    - 論理式が命題記号Pであるとき、この解釈の定義。
    - 論理式 A∨B がΓ*に入るなら、AまたはBがΓ*に入る。
      帰納法の仮定より、AまたはBはこの解釈のもとで真。
      したがって、A∨B もこの解釈のもとで真。

極大な無矛盾集合から作られる解釈

2.1(e)

- この解釈は、Γ*に属する任意の論理式を真にする。（属さない論理式は偽にする。）
  - 論理式の大きさ（構造）に関する帰納法
    - 論理式 ¬A がΓ*に入るなら、AはΓ*に入らない。
      （Γ*の無矛盾性より。）
      帰納法の仮定より、Aはこの解釈のもとで偽。
      したがって、¬Aはこの解釈のもとで真。
    - 論理式¬AがΓ*に入らないなら、AはΓ*に入る。
      （Γ*の極大性より。）
      帰納法の仮定より、Aはこの解釈のもとで真。
      したがって、¬Aはこの解釈のもとで偽。

コンパクト性の意義と導出

2.1(e)

- 有限部分が（個別に）充足可能ならば、
  全体を（同時に）充足する解釈が存在する。
- コンパクト性はどのようにして導かれるか。
  - 無矛盾なΓから始めて、
    Γに属さない各論理式Aについて、
    無矛盾性を保ちつつ、Aまたは¬Aを加える。
  - この手続きは止まらないが、極限として、
    Γを含む極大な無矛盾集合Γ*が得られる。
  - 任意の論理式Aについて、Aまたは¬AがΓ*に属する。
  - Γ*に属する命題記号を真にする解釈は、
    Γ*そしてΓを充足する。
  - Γが非可算の場合はZornの定理を用いる。

コンパクト性の対偶は？

Herbrandの定理

2.2(c)

- $\forall x_1 \ldots \forall x_n.\ A[x_1,\ldots,x_n]$：閉じた論理式
  - $A[x_1,\ldots,x_n]$ は $x_1,\ldots,x_n$ のみを自由に含み、しかも量化子（∃∀）は含まない。
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n.\ A[x_1,\ldots,x_n]$ が充足不能ならば、閉じた項 $t_{11},\ldots,t_{1n},\ldots,t_{m1},\ldots,t_{mn}$ が存在して、$\{A[t_{11},\ldots,t_{1n}], \ldots, A[t_{m1},\ldots,t_{mn}]\}$ が、命題論理式の集合として充足不能。
  - $A[t_{i1},\ldots,t_{in}]$ は $A[x_1,\ldots,x_n]$ の $x_1,\ldots,x_n$ に項 $t_{i1},\ldots,t_{in}$ を代入した結果を表す。
- すなわち、充足不能ならば、有限の具体例が命題論理において矛盾してしまう。

次の論理式をA[x,u,v,w]としたとき、A[c,c,c,c]は何になるか？

$(Q(u,v) \wedge Q(v,w) \supset Q(u,w)) \wedge$

$Q(c,c) \wedge$

$(\neg Q(f(x),x) \wedge Q(x,f(x))) \wedge$

$Q(f(f(c)),c)$

$A[x,u,v,w]$

$(Q(u,v) \wedge Q(v,w) \supset Q(u,w)) \wedge$

$Q(c,c) \wedge$

$(\neg Q(f(x),x) \wedge Q(x,f(x))) \wedge$

$Q(f(f(c)),c)$

$A[c,c,c,c]$

$(Q(c,c) \wedge Q(c,c) \supset Q(c,c)) \wedge$

$Q(c,c) \wedge$

$(\neg Q(f(c),c) \wedge Q(c,f(c))) \wedge$

$Q(f(f(c)),c)$

$A[c,c,c] \land A[f(c),f(f(c)),c,f(c)]$ を求めよ。

$(Q(u,v) \land Q(v,w) \supset Q(u,w)) \land$

$Q(c,c) \land$

$(\neg Q(f(x),x) \land Q(x,f(x))) \land$

$Q(f(f(c)),c)$

$A[f(c),f(f(c)),c,f(c)]$

$(Q(f(f(c)),c) \wedge Q(c,f(c)) \supset Q(f(f(c)),f(c))) \wedge$

$Q(c,c) \wedge$

$(\neg Q(f(f(c)),f(c)) \wedge Q(f(c),f(f(c)))) \wedge$

$Q(f(f(c)),c)$

$$A[c,c,c,c] \wedge A[f(c),f(f(c)),c,f(c)]$$

$$(Q(c,c) \wedge Q(c,c) \supset Q(c,c)) \wedge$$
$$Q(c,c) \wedge$$
$$(\neg Q(f(c),c) \wedge Q(c,f(c))) \wedge$$
$$Q(f(f(c)),c) \wedge$$
$$(Q(f(f(c)),c) \wedge Q(c,f(c)) \supset Q(f(f(c)),f(c))) \wedge$$
$$Q(c,c) \wedge$$
$$(\neg Q(f(f(c)),f(c)) \wedge Q(f(c),f(f(c)))) \wedge$$
$$Q(f(f(c)),c)$$

次のように原子論理式を命題記号に置き換えよ。

Q(c,c) → Q00

Q(c,f(c)) → Q01

Q(f(c),c) → Q10

Q(f(c),f(f(c))) → Q12

Q(f(f(c)),f(c)) → Q21

Q(c,f(f(c))) → Q02

Q(f(f(c)),c) → Q20

原子論理式を命題記号に

$(Q00 \wedge Q00 \supset Q00) \wedge$

$Q00 \wedge$

$(\neg Q10 \wedge Q01) \wedge$

$Q20 \wedge$

$(Q20 \wedge Q01 \supset Q21) \wedge$

$Q00 \wedge$

$(\neg Q21 \wedge Q12) \wedge$

$Q20$

その結果が充足不能で
あることを示せ。

次の充足不能な論理式に対してHerbrandの定理を確かめよ。

$$\forall x.\forall u.\forall v.\forall w.$$
$$(Q(u,v) \land Q(v,w) \supset Q(u,w)) \land$$
$$Q(c,c) \land$$
$$(\neg Q(f(x),x) \land Q(x,f(x))) \land$$
$$Q(f(f(c)),c)$$

Herbrand領域とHerbrand解釈

2(c)

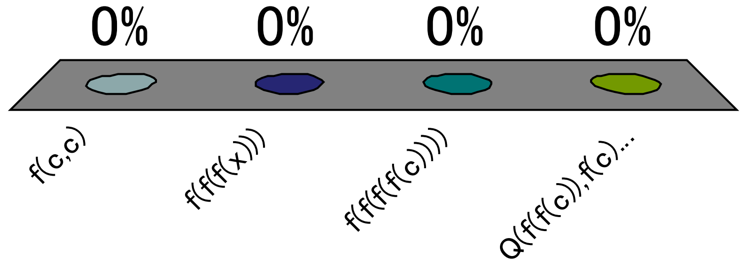
- Herbrand領域
  - 閉じた項（変数を含まない項）の全体
  - 定数記号は少なくとも一つあると仮定。
    - そうでないと空になってしまう。
- Herbrand基底
  - 閉じた原子論理式の全体
- Herbrand解釈
  - Herbrand領域を領域とする解釈で、
    定数記号と関数記号の解釈は固定。
  - 違いは述語記号の解釈のみ。
  - Herbrand解釈（すなわち述語記号の解釈）を与えることと、
    真となる閉じた原子論理式の集合を与えることは同じ。
  - 後者はHerbrand基底の部分集合。

次の論理式のHerbrand領域は？

$$\forall x.\forall u.\forall v.\forall w.$$
$$(Q(u,v) \land Q(v,w) \supset Q(u,w)) \land$$
$$Q(c,c) \land$$
$$(\neg Q(f(x),x) \land Q(x,f(x)))$$

Herbrand領域の要素は？

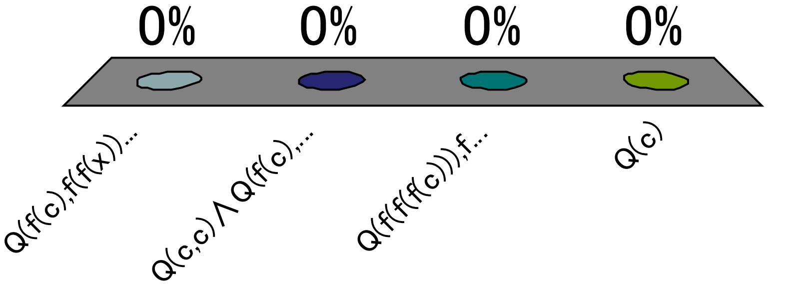
1. f(c,c)
2. f(f(f(x)))
3. f(f(f(f(c))))
4. Q(f(f(c)),f(c))



Herbrand基底は？

Herbrand基底の要素は？

1. Q(f(c),f(f(x)))
2. Q(c,c)∧Q(f(c),f(c))
3. Q(f(f(f(c))),f(f(f(c))))
4. Q(c)



Herbrand解釈

2.2(c)

- 領域はHerbrand領域 $\mathbf{H}$ に固定
- 定数記号 c の解釈は、それ自身

  $I(\mathrm{c}) = \mathrm{c}$

- たとえば、アリティ 1 の関数記号 f の解釈 $I(\mathrm{f})$ は

  $I(\mathrm{f}) : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$

  $I(\mathrm{f})(t) = \mathrm{f}(t) \in \mathbf{H} \quad (t \in \mathbf{H})$

- 一般に、閉じた項 t の解釈 $[[t]]_I$ は t 自身

  $[[\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{c}))]]_I = I(\mathrm{f})([[\mathrm{f}(\mathrm{c})]]_I) = I(\mathrm{f})(I(\mathrm{f})([[\mathrm{c}]]_I)) =$

  $I(\mathrm{f})(I(\mathrm{f})(\mathrm{c})) = I(\mathrm{f})(\mathrm{f}(\mathrm{c})) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{c}))$

Herbrand解釈

2.2(c)

- たとえば、アリティ 2 の述語記号 Q の解釈 I(Q) は

$$I(\mathrm{Q}) : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \{\mathrm{T}, \perp\}$$

- Herbrand解釈ごとに異なる。
- 閉じた原子論理式（Herbrand基底の要素）に真偽を与えるのと同じ。
  - Herbrand解釈 I と閉じた原子論理式を命題記号とする解釈 I' は

$$I'(\mathrm{Q(f(f(c)),c)}) = I(\mathrm{Q})(\mathrm{f(f(c)),c})$$

    というように対応。

次の論理式をA[x,u,v,w]としたとき、A[c,c,c,c]∧A[f(c),c,f(c),f(f(c))] を求めよ。

$(Q(u,v) \land Q(v,w) \supset Q(u,w)) \land$

$Q(c,c) \land$

$(\neg Q(f(x),x) \land Q(x,f(x)))$

$A[x,u,v,w]$

$$(Q(u,v) \wedge Q(v,w) \supset Q(u,w)) \wedge$$

$$Q(c,c) \wedge$$

$$(\neg Q(f(x),x) \wedge Q(x,f(x)))$$

A[c,c,c,c]

$(Q(c,c) \wedge Q(c,c) \supset Q(c,c)) \wedge$

$Q(c,c) \wedge$

$(\neg Q(f(c),c) \wedge Q(c,f(c)))$

$A[f(c),f(f(c)),c,f(c)]$

$(Q(f(f(c)),c) \land Q(c,f(c)) \supset Q(f(f(c)),f(c)))\ \land$

$Q(c,c)\ \land$

$(\neg Q(f(f(c)),f(c)) \land Q(f(c),f(f(c))))$

$A[c,c,c,c] \land A[f(c),f(f(c)),c,f(c)]$

$(Q(c,c) \land Q(c,c) \supset Q(c,c)) \land$

$Q(c,c) \land$

$(\neg Q(f(c),c) \land Q(c,f(c))) \land$

$(Q(f(f(c)),c) \land Q(c,f(c)) \supset Q(f(f(c)),f(c))) \land$

$Q(c,c) \land$

$(\neg Q(f(f(c)),f(c)) \land Q(f(c),f(f(c))))$

次のように原始論理式を命題記号に置き換えよ。

Q(c,c) → Q00

Q(c,f(c)) → Q01

Q(f(c),c) → Q10

Q(f(c),f(f(c))) → Q12

Q(f(f(c)),f(c)) → Q21

Q(c,f(f(c))) → Q02

原子論理式を命題記号に

$(Q00 \wedge Q00 \supset Q00) \wedge$

$Q00 \wedge$

$(\neg Q10 \wedge Q01) \wedge$

$(Q20 \wedge Q01 \supset Q21) \wedge$

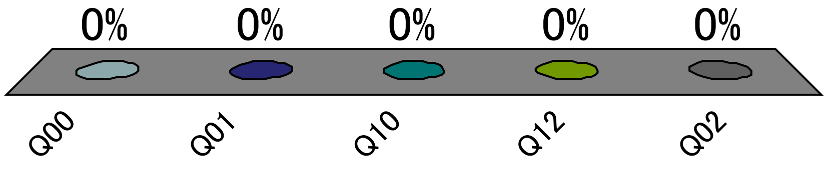
$Q00 \wedge$

$(\neg Q21 \wedge Q12)$

その結果を充足する解釈を求めよ。

次のうち偽になるものは

1. Q00
2. Q01
3. Q10
4. Q12
5. Q02



次の論理式を充足するHerbrand解釈を求めよ。

$\forall x. \forall u. \forall v. \forall w.$

$(Q(u,v) \land Q(v,w) \supset Q(u,w)) \land$

$Q(c,c) \land$

$(\neg Q(f(x),x) \land Q(x,f(x)))$

Herbrandの定理

2.2(c)

- $\forall x_1 \ldots \forall x_n.\ A[x_1,\ldots,x_n]$：閉じた論理式
  - $A[x_1,\ldots,x_n]$ は $x_1,\ldots,x_n$ のみを自由に含み、しかも量化子（$\exists\forall$）は含まない。
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n.\ A[x_1,\ldots,x_n]$ が充足不能ならば、閉じた項 $t_{11},\ldots,t_{1n},\ldots,t_{m1},\ldots,t_{mn}$ が存在して、$\{A[t_{11},\ldots,t_{1n}], \ldots, A[t_{m1},\ldots,t_{mn}]\}$ が、命題論理式の集合として充足不能。
  - $A[t_{i1},\ldots,t_{in}]$ は $A[x_1,\ldots,x_n]$ の $x_1,\ldots,x_n$ に項 $t_{i1},\ldots,t_{in}$ を代入した結果を表す。
- すなわち、充足不能ならば、有限の具体例が命題論理において矛盾してしまう。

Herbrandの定理の導出

2.2(c)

- $\forall x_1 \ldots \forall x_n.\ A[x_1,\ldots,x_n]$: 閉じた論理式
  - $A[x_1,\ldots,x_n]$ は $x_1,\ldots,x_n$ のみを自由に含み、しかも量化子(∃∀)は含まない。
- $\Gamma=\{A[t_1,\ldots,t_n] : t_1,\ldots,t_n$ は閉じた項$\}$ とする。
  - 閉じた原子論理式を命題記号とみなす。
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n.\ A[x_1,\ldots,x_n]$ が充足不能ならば、Γは命題論理式の集合として充足不能である。
  - もしもΓが充足可能だと、$\forall x_1 \ldots \forall x_n.\ A[x_1,\ldots,x_n]$ を充足するHerbrand解釈が存在してしまう。
- Γが充足不能ならば、命題論理のコンパクト性より、Γのある有限部分集合が充足不能。
  - 閉じた項 $t_{11},\ldots,t_{1n},\ldots,t_{m1},\ldots,t_{mn}$ が存在して、$\{A[t_{11},\ldots,t_{1n}], \ldots, A[t_{m1},\ldots,t_{mn}]\}$ が充足不能。

A[x,u,v,w] の場合

2.2(c)

- Γ は A[c,c,c,c], A[c,c,c,f(c)], A[c,c,f(c),c], …, A[f(c),c,f(c),f(f(c))], …
  などから成る無限集合
  - 閉じた項のすべての組合せ
- Γ を命題論理式の集合として充足する
  解釈があれば、
  それをHerbrand解釈と思うと
  ∀x.∀u.∀v.∀w. A[x,u,v,w] が充足される。

証明手続きとしてのHerbrandの定理

2.2(c)

- $\forall x_1 \ldots \forall x_n.\ A[x_1,\ldots,x_n]$ が充足不能、すなわち、
  $\neg \forall x_1 \ldots \forall x_n.\ A[x_1,\ldots,x_n]$ が恒真ならば、
  閉じた項を網羅的に調べることにより、
  充足不能な $\{A[t_{11},\ldots,t_{1n}], \ldots, A[t_{m1},\ldots,t_{mn}]\}$ を
  見付けることができる。
  - 一階述語論理の完全性へ。
- 一般の論理式は、Skolem化により、
  充足可能性を変えずに上の形に変形できる。
  - $\forall x. \exists y.\ A[x,y]$ を $\forall x.\ A[x,f(x)]$ に変形。
  - f は新しい関数記号でSkolem関数という。

$\forall x_1 \dots \forall x_n.\ A[x_1,\dots,x_n]$ が充足不能でないと？

導出原理(論理プログラミング)

2.2(f)

- $A \wedge B \supset C$ と $\neg(C \wedge D)$ から $\neg(A \wedge B \wedge D)$
- A と $\neg A$ から矛盾
- 一般に、$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$ と
  $\neg(B \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_m)$ から
  $\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_m)$
- $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$ は、n=0 のとき B を表す
- $\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$ は、n=0 のとき矛盾を表す
  - 充足不能ならば矛盾が導かれる
- 入力導出(導出原理の一種)

導出原理（論理プログラミング）

2.2(f)

- あらかじめ代入を行うのではなく、
  異なる変数に置き換え、
  導出を行いながら変数を具体化する。
- 単一化
  - 二つ以上の項や論理式を同じにするように、
    変数に対して具体化を行う。
  - 必要最小限の具体化 --- 最汎具体化
- 例を参照…

次の論理式をA[x,u,v,w]としたとき、
$A[c,c,c,c] \land A[f(c),f(f(c)),c,f(c)]$
から矛盾を求めよ。

$(Q(u,v) \land Q(v,w) \supset Q(u,w)) \land$
$Q(c,c) \land$
$(\neg Q(f(x),x) \land Q(x,f(x))) \land$
$Q(f(f(c)),c)$

$$A[c,c,c,c] \land A[f(c),f(f(c)),c,f(c)]$$

$$(Q(c,c) \land Q(c,c) \supset Q(c,c)) \land$$

$$Q(c,c) \land$$

$$(\neg Q(f(c),c) \land Q(c,f(c))) \land$$

$$Q(f(f(c)),c) \land$$

$$(\underline{Q(f(f(c)),c) \land Q(c,f(c)) \supset Q(f(f(c)),f(c))}) \land$$

$$Q(c,c) \land$$

$$(\underline{\neg Q(f(f(c)),f(c))} \land Q(f(c),f(f(c)))) \land$$

$$Q(f(f(c)),c)$$

$A[c,c,c,c] \wedge A[f(c),f(f(c)),c,f(c)]$

$(Q(c,c) \wedge Q(c,c) \supset Q(c,c)) \wedge$

$Q(c,c) \wedge$

$(\neg Q(f(c),c) \wedge Q(c,f(c))) \wedge$

$\underline{Q(f(f(c)),c)} \wedge$

$(Q(f(f(c)),c) \wedge Q(c,f(c)) \supset Q(f(f(c)),f(c))) \wedge$

$Q(c,c) \wedge$

$(\neg Q(f(f(c)),f(c)) \wedge Q(f(c),f(f(c)))) \wedge$

$Q(f(f(c)),c)$

$\underline{\neg(Q(f(f(c)),c) \wedge Q(c,f(c)))}$

$$A[c,c,c,c] \wedge A[f(c),f(f(c)),c,f(c)]$$

$(Q(c,c) \wedge Q(c,c) \supset Q(c,c)) \wedge$

$Q(c,c) \wedge$

$(\neg Q(f(c),c) \wedge \underline{Q(c,f(c))}) \wedge$

$Q(f(f(c)),c) \wedge$

$(Q(f(f(c)),c) \wedge Q(c,f(c)) \supset Q(f(f(c)),f(c))) \wedge$

$Q(c,c) \wedge$

$(\neg Q(f(f(c)),f(c)) \wedge Q(f(c),f(f(c)))) \wedge$

$Q(f(f(c)),c)$

$\neg(Q(f(f(c)),c) \wedge Q(c,f(c)))$

$\underline{\neg Q(c,f(c))}$

$A[x,u,v,w] \land A[x1,u1,v1,w1]$ から矛盾を求めよ。

$(Q(u,v) \land Q(v,w) \supset Q(u,w)) \land$

$Q(c,c) \land$

$(\neg Q(f(x),x) \land Q(x,f(x))) \land$

$Q(f(f(c)),c)$

$A[x,u,v,w] \land A[x1,u1,v1,w1]$

$(Q(u,v) \land Q(v,w) \supset Q(u,w)) \land$

$Q(c,c) \land$

$(\neg Q(f(x),x) \land Q(x,f(x))) \land$

$Q(f(f(c)),c) \land$

$(\underline{Q(u1,v1) \land Q(v1,w1) \supset Q(u1,w1)}) \land$

$Q(c,c) \land$

$(\underline{\neg Q(f(x1),x1}) \land Q(x1,f(x1))) \land$

$Q(f(f(c)),c)$

$A[x,u,v,w] \wedge A[x1,u1,v1,w1]$

$(Q(u,v) \wedge Q(v,w) \supset Q(u,w)) \wedge$

$Q(c,c) \wedge$

$(\neg Q(f(x),x) \wedge Q(x,f(x))) \wedge$

$\underline{Q(f(f(c)),c)} \wedge$

$(Q(u1,v1) \wedge Q(v1,w1) \supset Q(u1,w1)) \wedge$

$Q(c,c) \wedge$

$(\neg Q(f(x1),x1) \wedge Q(x1,f(x1))) \wedge$

$Q(f(f(c)),c)$

$u1 = f(x1)$

$w1 = x1$

$\underline{\neg(Q(u1,v1) \wedge Q(v1,w1))}$

$$A[x,u,v,w] \wedge A[x1,u1,v1,w1]$$

$(Q(u,v) \wedge Q(v,w) \supset Q(u,w)) \wedge$

$Q(c,c) \wedge$

$(\neg Q(f(x),x) \wedge \underline{Q(x,f(x))}) \wedge$

$Q(f(f(c)),c) \wedge$

$(Q(u1,v1) \wedge Q(v1,w1) \supset Q(u1,w1)) \wedge$

$Q(c,c) \wedge$

$(\neg Q(f(x1),x1) \wedge Q(x1,f(x1))) \wedge$

$Q(f(f(c)),c)$

$u1 = f(x1)$

$w1 = x1$

$x1 = f(c)$

$v1 = c$

$\neg(Q(u1,v1) \wedge Q(v1,w1))$

$\underline{\neg Q(v1,w1)}$

$$A[x,u,v,w] \land A[x1,u1,v1,w1]$$

$(Q(u,v) \land Q(v,w) \supset Q(u,w)) \land$

$Q(c,c) \land$

$(\neg Q(f(x),x) \land \underline{Q(x,f(x))}) \land$

$Q(f(f(c)),c) \land$

$(Q(u1,v1) \land Q(v1,w1) \supset Q(u1,w1)) \land$

$Q(c,c) \land$

$(\neg Q(f(x1),x1) \land Q(x1,f(x1))) \land$

$Q(f(f(c)),c)$

$u1 = f(x1)$

$w1 = x1$

$x1 = f(c)$

$v1 = c$

$x = c$

$\neg(Q(u1,v1) \land Q(v1,w1))$

$\underline{\neg Q(v1,w1)}$

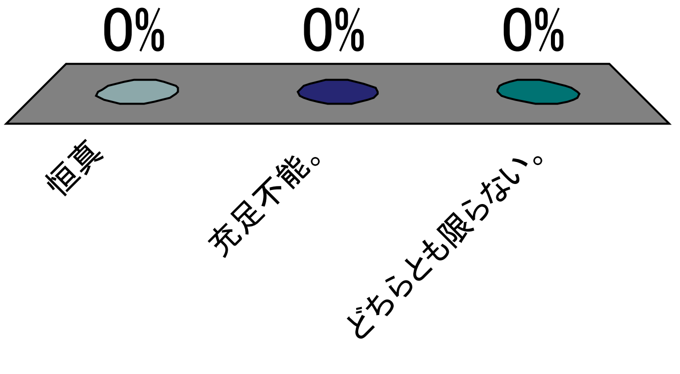
一階述語論理の演繹体系

2.2(d)

- 一般に演繹体系とは、公理から始めて、推論規則を用いて定理を導く体系
  - Hilbert流・自然演繹・シーケント計算・・・
- Hilbert流
  - 恒真な論理式を定理として導く。
  - 公理
    - 簡単のため、トートロジーの命題記号を一様に論理式で置き換えたものを公理とする（例: $(\forall x.\ P(x)) \lor \neg(\forall x.\ P(x))$）
    - $(\forall x.\ A[x]) \supset A[t]$
    - $(\forall x.\ (A \supset B[x])) \supset (A \supset (\forall x.\ B[x]))$ （A に x は自由に現れない。）
  - 推論規則
    - modus ponens: A と $A \supset B$ から B を導出。
    - 汎化: $A[x]$ から $\forall x.\ A[x]$ を導出。
  - $\exists x.\ A[x]$ は $\neg(\forall x.\ \neg A[x])$ の略とする。

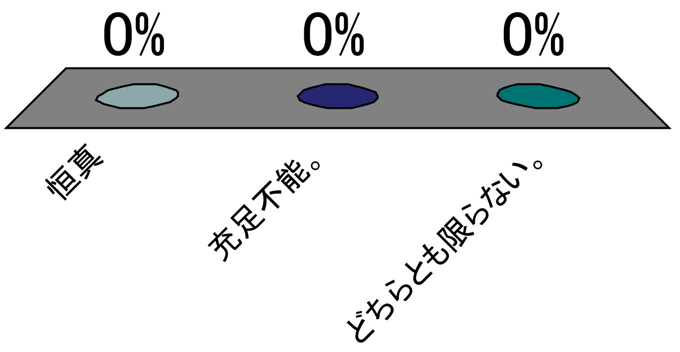
$A[x] \supset (\forall x.\ A[x])$ は

1. 恒真
2. 充足不能。
3. どちらとも限らない。



$(\forall x.\ A[x]) \supset A[x]$ は

1. 恒真
2. 充足不能。
3. どちらとも限らない。



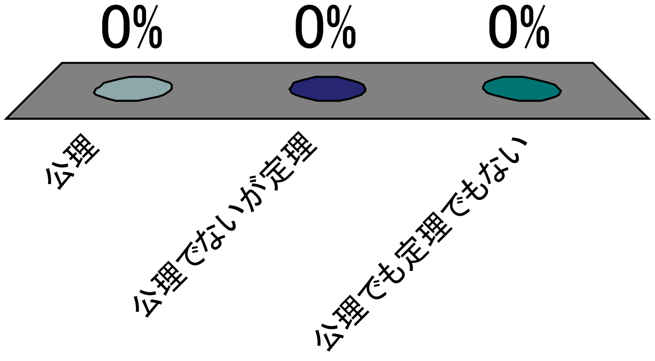
一階述語論理の演繹体系

2.2(d)

- 一般に演繹体系とは、公理から始めて、推論規則を用いて定理を導く体系
  - Hilbert流・自然演繹・シーケント計算・・・
- Hilbert流
  - 恒真な論理式を定理として導く。
  - 公理
    - 簡単のため、トートロジーの命題記号を一様に論理式で置き換えたものを公理とする（例: $(\forall x.\ P(x)) \vee \neg(\forall x.\ P(x))$）
    - $(\forall x.\ A[x]) \supset A[t]$ t は任意の項
    - $(\forall x.\ (A \supset B[x])) \supset (A \supset (\forall x.\ B[x]))$（A に x は自由に現れない。）
  - 推論規則
    - modus ponens: A と $A \supset B$ から B を導出。
    - 汎化: $A[x]$ から $\forall x.\ A[x]$ を導出。
  - $\exists x.\ A[x]$ は $\neg(\forall x.\ \neg A[x])$ の略とする。

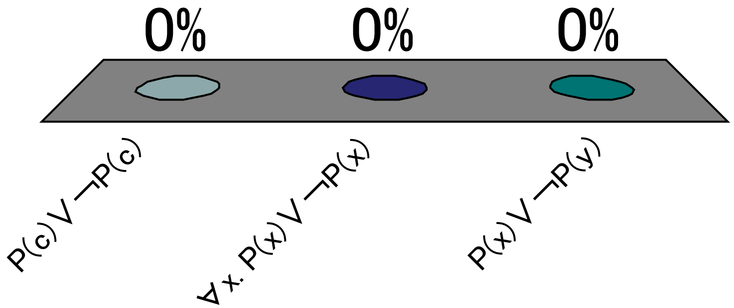
$P(x) \lor \neg P(x)$ は

1. 公理
2. 公理でないが定理
3. 公理でも定理でもない



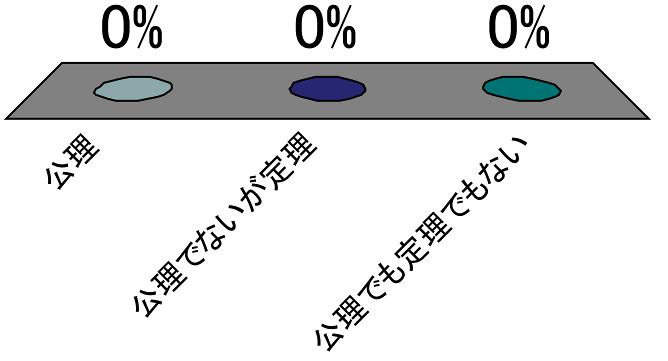
$P(x) \vee \neg P(x)$ に汎化を適用すると

1. $P(c) \vee \neg P(c)$
2. $\forall x.\ P(x) \vee \neg P(x)$
3. $P(x) \vee \neg P(y)$



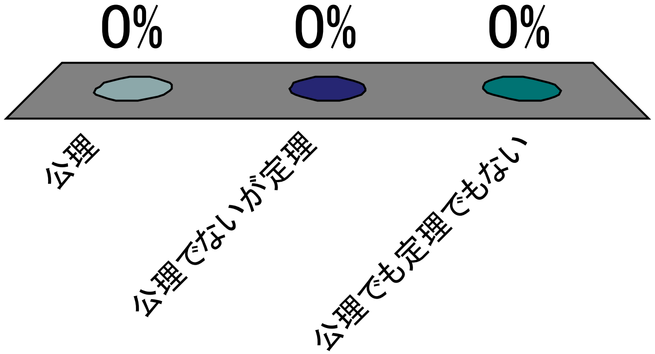
$(\forall x.\ P(x) \land Q(x)) \supset P(y) \land Q(y)$ は

1. 公理
2. 公理でないが定理
3. 公理でも定理でもない



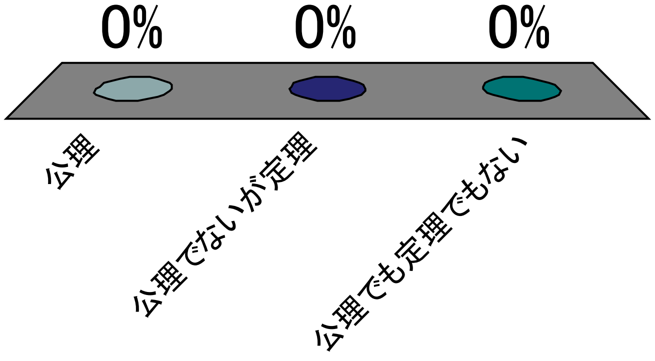
$$((\forall x.\, P(x) \wedge Q(x)) \supset P(y) \wedge Q(y)) \supset ((\forall x.\, P(x) \wedge Q(x)) \supset P(y))$$ は

1. 公理
2. 公理でないが定理
3. 公理でも定理でもない



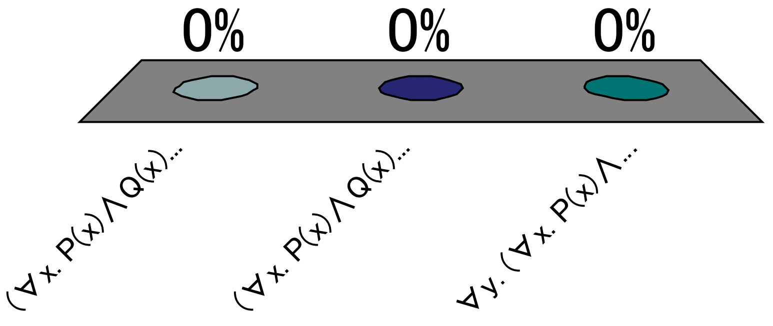
$(\forall x.\ P(x) \wedge Q(x)) \supset P(y)$ は

1. 公理
2. 公理でないが定理
3. 公理でも定理でもない



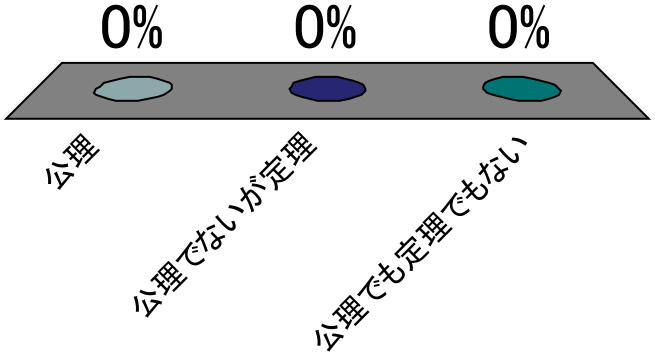
$(\forall x.\ P(x) \land Q(x)) \supset P(y)$ に汎化を適用すると

1. $(\forall x.\ P(x) \land Q(x)) \supset P(c)$
2. $(\forall x.\ P(x) \land Q(x)) \supset (\forall y.\ P(y))$
3. $\forall y.\ (\forall x.\ P(x) \land Q(x)) \supset P(y)$



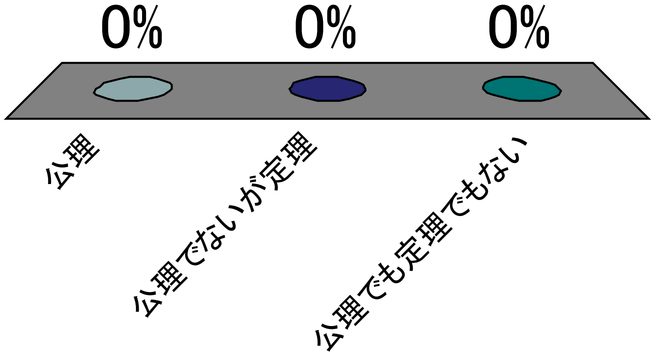
$(\forall y.\ (\forall x.\ P(x) \land Q(x)) \supset P(y)) \supset ((\forall x.\ P(x) \land Q(x)) \supset (\forall y.\ P(y)))$ は

1. 公理
2. 公理でないが定理
3. 公理でも定理でもない



$(\forall x.\ P(x) \land Q(x)) \supset (\forall y.\ P(y))$ は

1. 公理
2. 公理でないが定理
3. 公理でも定理でもない



一般に、

$(A \supset (\forall x.\ B[x])) \supset (\forall x.\ A \supset B[x])$ は定理になることを示せ

（この逆は公理。その形の公理を用いる。）

健全性と完全性

2.2(d)

- 健全性
  - すべての定理が恒真であること。
  - 公理が恒真であり、推論規則が恒真性を保存するならば、健全性は満たされる。
- 完全性
  - すべての恒真な論理式が定理として導けること。
- Hilbert流の完全性
  - 閉じた論理式 A_0 が恒真であるとき、$\neg A_0$ は充足不能。
  - これをSkolem化して $\forall x_1 \ldots \forall x_n.\ A[x_1,\ldots,x_n]$ を得る。
  - Herbrandの定理より、充足不能な有限集合 $\{A[t_{11},\ldots,t_{1n}], \ldots, A[t_{m1},\ldots,t_{mn}]\}$ が存在。
  - 従って、$\neg(A[t_{11},\ldots,t_{1n}] \wedge \ldots \wedge A[t_{m1},\ldots,t_{mn}])$ はトートロジー。
  - これらを用いて、もとの A_0 を定理として導くことができる。

一階述語論理のコンパクト性

2.2(d)

- 命題論理のコンパクト性から、
  一階述語論理のコンパクト性が導かれる。
  - 一階述語論理の閉じた論理式の集合Γに対して、
    Γが充足可能 ⇔
    　　　　　　Γの任意の有限部分集合が充足可能
- コンパクト性と（弱い）完全性から、
  強い完全性が導かれる。
  - Γを閉じた論理式の集合、Aを閉じた論理式とするとき、
    Γを充足する解釈が必ずAを充足する（Γ|=A）ならば、
    Γに属する論理式からAが証明可能（Γ|-A）
- 逆に、強い完全性から弱い完全性とコンパクト性