情報論理の壺1

萩谷

命題論理の構文と意味

2.1

- 命題論理式
  - 命題記号
  - 論理演算子：¬∨∧⊃など
- 命題論理式の解釈
  - 命題記号への真偽値の割り当て
- トートロジー（恒真）
  - どのような解釈のもとでも真になる論理式（例：P∨¬P）
- 充足可能
  - ある解釈のもとで真になる論理式（例：P∧¬Q）
- 充足不能
  - 充足可能でないこと（例：P∧¬P）

    A が充足不能 ⇔ $\neg A$ がトートロジー

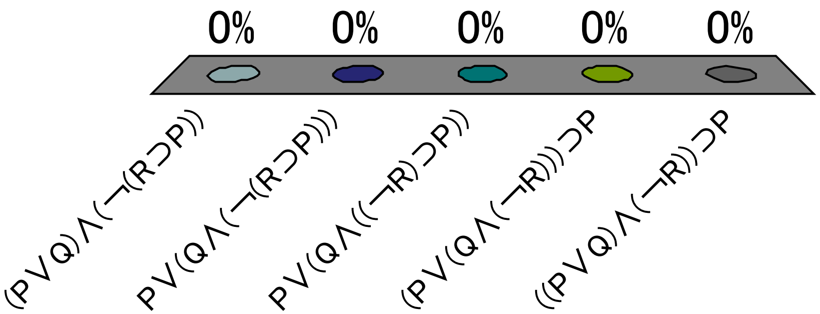
命題論理式

2.1(c)

- 命題記号
  - 命題を表す記号（P とか Q とか）
  - 真（T）か偽（⊥）に解釈される。
- 論理演算子
  - かつ（∧）、または（∨）、ならば（⊃）
    - これらは二項・中置
    - この順に結合力が弱くなる。
    - ⊃は右に結合（それ以外は左に結合）
  - でない（¬）
    - 単項・前置
- 論理式は、A とか B で表す。

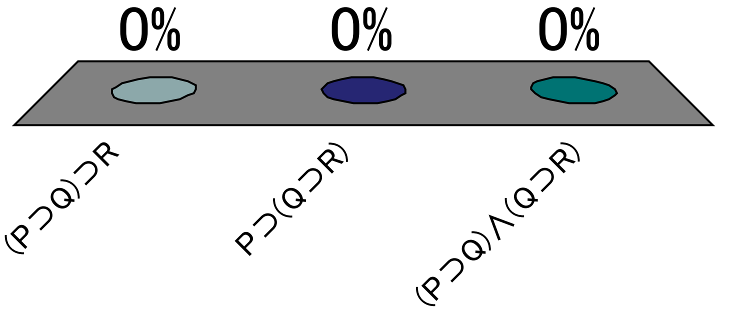
$P \vee Q \wedge \neg R \supset P$ とは？

1. $(P \vee Q) \wedge (\neg(R \supset P))$
2. $P \vee (Q \wedge (\neg(R \supset P)))$
3. $P \vee (Q \wedge ((\neg R) \supset P))$
4. $(P \vee (Q \wedge (\neg R))) \supset P$
5. $((P \vee Q) \wedge (\neg R)) \supset P$



P⊃Q⊃R とは？

1. (P⊃Q)⊃R
2. P⊃(Q⊃R)
3. (P⊃Q)∧(Q⊃R)



命題論理式の解釈

- 解釈とは、命題記号の集合から $\{\top, \bot\}$ への関数
- I（アイ）を解釈としたとき、$[\![A]\!]_I$ によって、A を I によって解釈した結果（$\top$ または $\bot$）を表す。

命題論理式の解釈

2.1(d)

- I(P) = T, I(Q) = Tのとき

  $[[P \wedge Q]]_I$ = T, $[[P \vee Q]]_I$ = T, $[[P \supset Q]]_I$ = T
- I(P) = T, I(Q) = ⊥ のとき

  $[[P \wedge Q]]_I$ = ⊥, $[[P \vee Q]]_I$ = T, $[[P \supset Q]]_I$ = ⊥
- I(P) = ⊥, I(Q) = T のとき

  $[[P \wedge Q]]_I$ = ⊥, $[[P \vee Q]]_I$ = T, $[[P \supset Q]]_I$ = T
- I(P) = ⊥, I(Q) = ⊥ のとき

  $[[P \wedge Q]]_I$ = ⊥, $[[P \vee Q]]_I$ = ⊥, $[[P \supset Q]]_I$ = T
- I(P) = T のとき $[[\neg P]]_I$ = ⊥
- I(P) = ⊥のとき $[[\neg P]]_I$ = T

命題論理の構文と意味

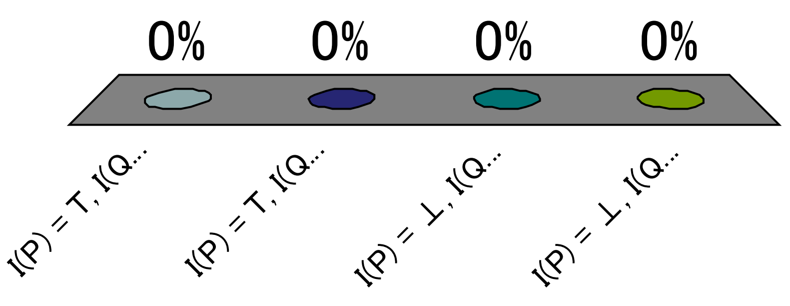
2.1

- 命題論理式
  - 命題記号
  - 論理演算子：¬ ∨ ∧ ⊃など
- 命題論理式の解釈
  - 命題記号への真偽値の割り当て
- トートロジー（恒真）
  - どのような解釈のもとでも真になる論理式（例：P ∨ ¬P）
- 充足可能
  - ある解釈のもとで真になる論理式（例：P ∧ ¬Q）
- 充足不能
  - 充足可能でないこと（例：P ∧ ¬P）

  A が充足不能 ⇔ $\neg A$ がトートロジー

P∧¬Q を充足する解釈 *I* は？

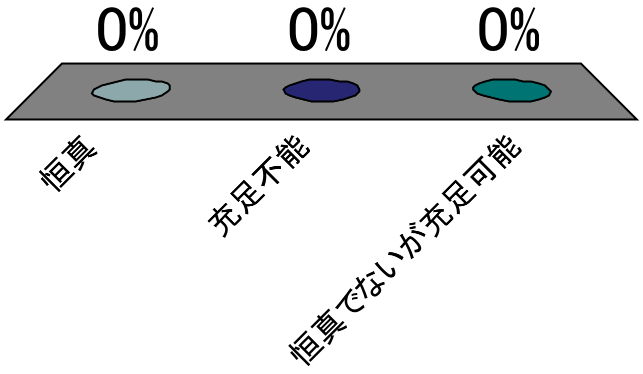
1. I(P) = T, I(Q) = T
2. I(P) = T, I(Q) = ⊥
3. I(P) = ⊥, I(Q) = T
4. I(P) = ⊥, I(Q) = ⊥



「A が充足不能ならば、
$\neg A$ がトートロジーである」ことを
説明せよ。

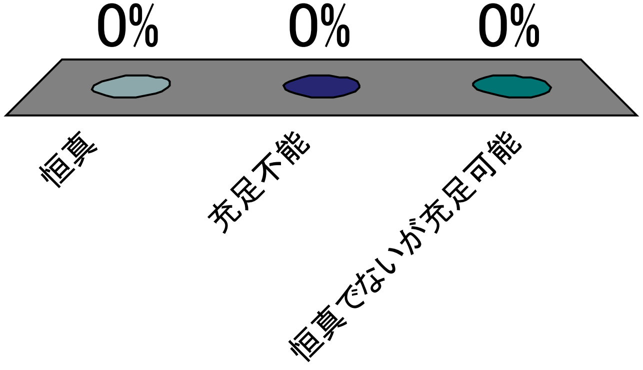
((P ⊃ Q) ⊃ Q) ⊃ Q は

1. 恒真
2. 充足不能
3. 恒真でないが充足可能



((P⊃Q)⊃P)⊃P は

1. 恒真
2. 充足不能
3. 恒真でないが充足可能



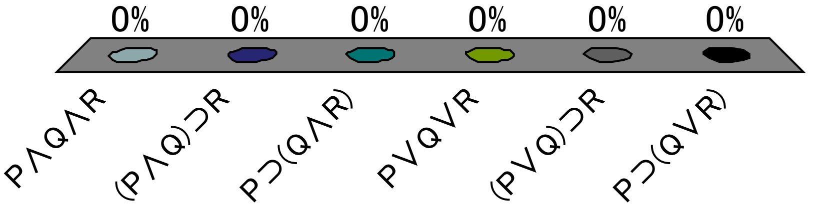
論理同値

2.1(d)

- 論理式 A と論理式 B の真偽値が、どのような解釈のもとでも一致するとき、A と B は論理同値であるという。
  - 論理式の間の同値関係。

$P \supset Q \supset R$ と論理同値なのは？

1. $P \land Q \land R$
2. $(P \land Q) \supset R$
3. $P \supset (Q \land R)$
4. $P \lor Q \lor R$
5. $(P \lor Q) \supset R$
6. $P \supset (Q \lor R)$



一階述語論理の構文

2.2(a)

- 一階述語論理の項
  - 変数
  - 関数記号（および定数記号）
- 一階述語論理の論理式
  - 述語記号（および命題記号） ⇒ 原子論理式
  - 命題論理の論理演算子：¬ ∨ ∧ ⊃ など
  - 量化記号：∃ ∀
- 自由変数・束縛変数
  - 自由な出現・束縛する出現・束縛される出現
- 閉じた論理式
  - 自由変数を含まない論理式

2.2(a)

変数

- 可算無限個の変数を仮定。
  - x0, x1, x2, x3, …
  - わかりにくいので、
    x とか y とか z などの名前を使う。
- 各変数は、「領域」と呼ばれる
  空でない集合の要素を値としてとる。
  - このような変数は、一階の変数と呼ばれる。

2.2(a)

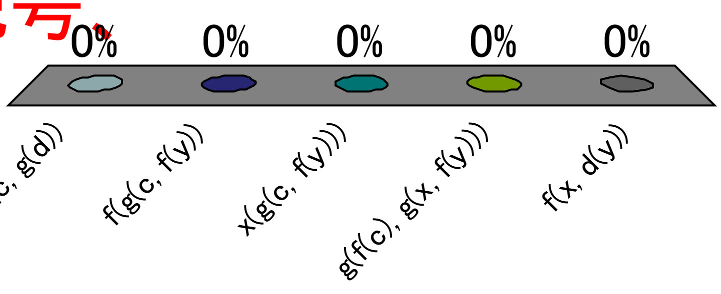
項

- 関数記号には引数の数が定まっている。
  - アリティ(arity)という。
- アリティが0の関数記号は、定数記号である。
  - c が定数記号であるとき、c() は単に c と書く。
- 関数記号(および述語記号)はあらかじめ定めておく(一階の言語)。
  - 現実的には、与えられた論理式に現れる関数記号(および述語記号)を含む言語を想定する。

項として正しいのは？

1. f(c, g(d))
2. f(g(c, f(y))
3. x(g(c, f(y)))
4. g(f(c), g(x, f(y)))
5. f(x, d(y))

ただし、f はアリティが1の関数記号、
g はアリティが2の関数記号、
c と d は定数記号、
x と y は変数とする。



2.2(a)

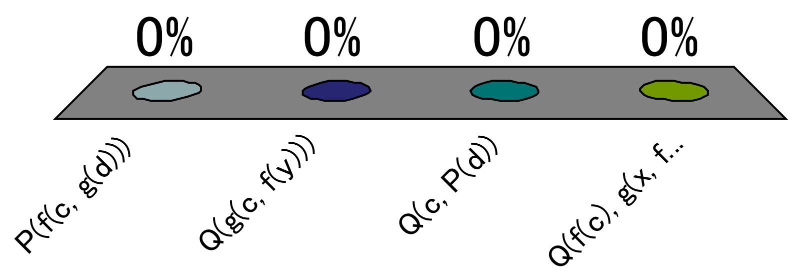
原子論理式

- 述語記号にはarityが定まっている。
- アリティが0の述語記号は、命題記号である。
  - P が命題記号であるとき、P() は単に P と書く。
- 述語記号と（そのarityの個数の）項から作られる式が、原子論理式である。

原子論理式として正しいのは？

1. P(f(c, g(d)))
2. Q(g(c, f(y)))
3. Q(c, P(d))
4. Q(f(c), g(x, f(y)))

ただし、P はアリティが1の述語記号、
Q はアリティが2の述語記号、
f はアリティが1の関数記号、
g はアリティが2の関数記号、
c と d は定数記号、
x と y は変数とする。



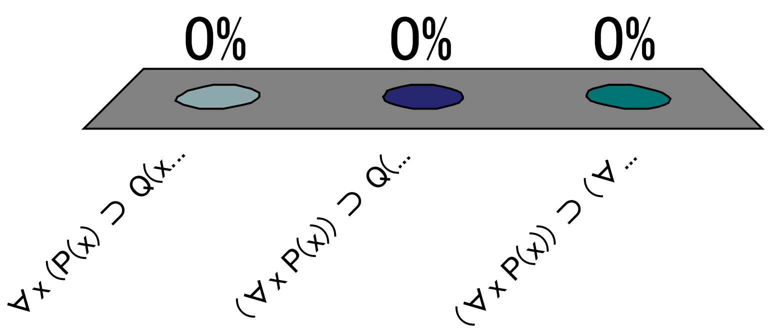
2.2(a)

量化記号

- 限定子などとも呼ばれる。英語はquantifier。
- 全称記号∀
  - ∀x P(x) --- すべての x について P(x)
  - x は束縛変数（束縛する出現・された出現）
- 存在記号∃
  - ∃x P(x) --- P(x) を満たす x が存在
- 量化記号と変数で、単項演算子となる。
  - 単項演算子の結合力は二項演算子より強いが、∀x. のように . が付くと、最も弱くなる。

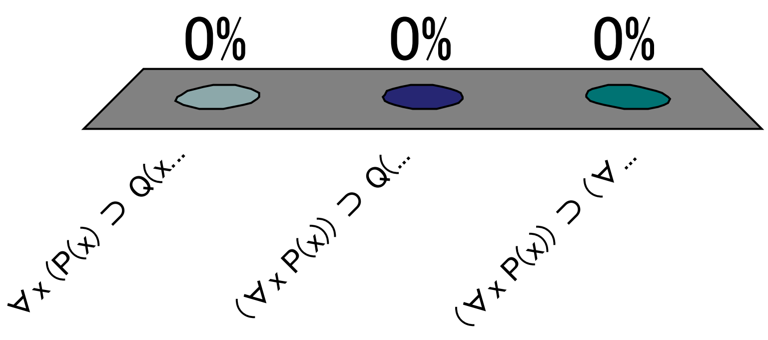
$\forall x\, P(x) \supset Q(x)$ とは？

1. $\forall x\, (P(x) \supset Q(x))$
2. $(\forall x\, P(x)) \supset Q(x)$
3. $(\forall x\, P(x)) \supset (\forall x\, Q(x))$



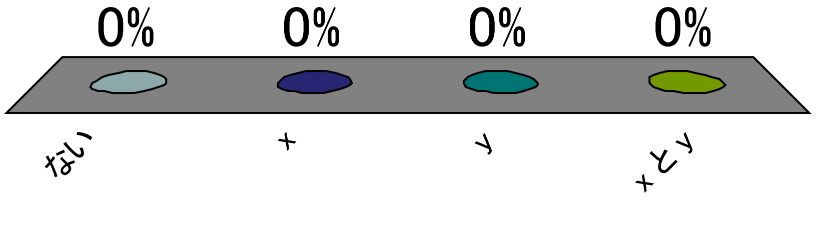
∀x. P(x) ⊃ Q(x) とは？

1. ∀x (P(x) ⊃ Q(x))
2. (∀x P(x)) ⊃ Q(x)
3. (∀x P(x)) ⊃ (∀x Q(x))



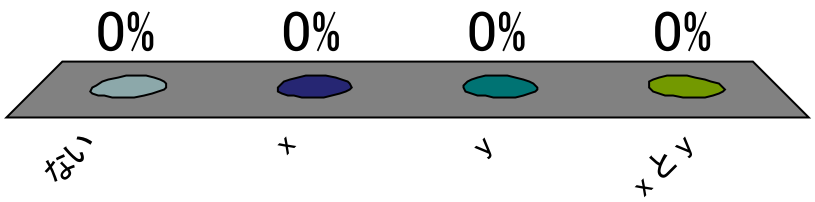
$(\forall x.\ P(x)) \supset Q(x,y)$ の自由変数は

1. ない
2. x
3. y
4. x と y



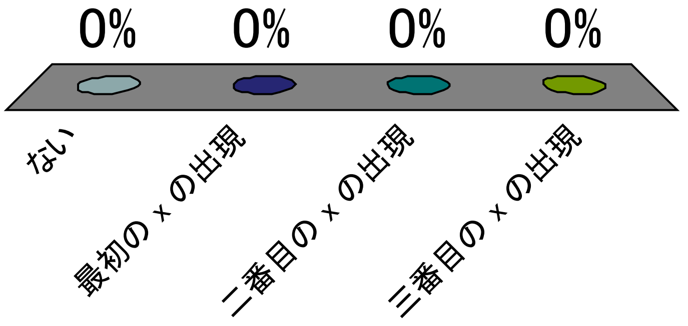
$(\forall x.\ P(x)) \supset Q(x,y)$ の束縛変数は

1. ない
2. x
3. y
4. x と y



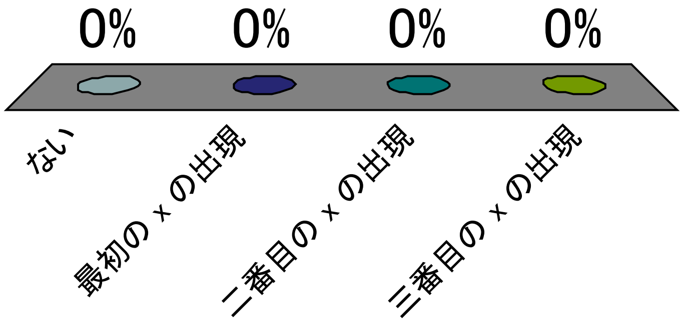
$(\forall x.\ P(x)) \supset Q(x,y)$ の自由な出現は

1. ない
2. 最初の x の出現
3. 二番目の x の出現
4. 三番目の x の出現



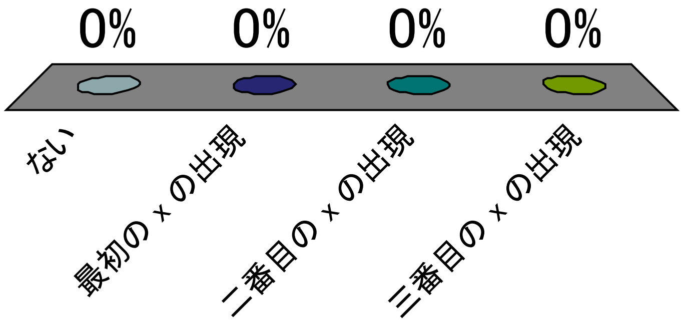
(∀x. P(x)) ⊃ Q(x,y) の束縛する出現は

1. ない
2. 最初の x の出現
3. 二番目の x の出現
4. 三番目の x の出現



$(\forall x.\ P(x)) \supset Q(x,y)$ の束縛された出現は

1. ない
2. 最初の x の出現
3. 二番目の x の出現
4. 三番目の x の出現



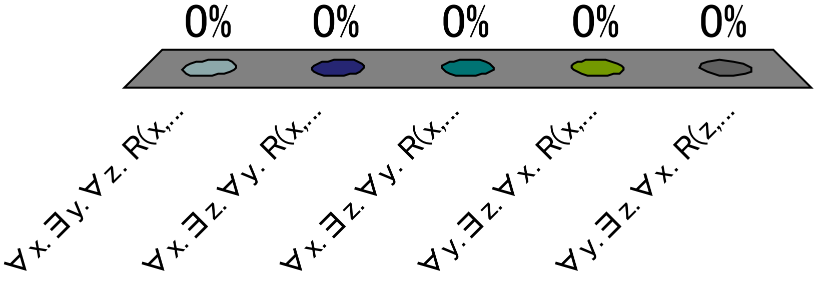
2.2(a)

α同値

- 束縛変数の名前を換えて移り合う論理式を、互いにα同値という。
  - 論理式の間の同値関係。
- 束縛変数の名前を換えることを、α変換という。
- α同値ならば論理同値。
- 通常、α同値な論理式は、「同じ」論理式と考えてしまう。
  - つまり、論理式をα同値に関する同値類と考える。

$\forall x. \exists y. \forall z. R(x,y,z)$ と α同値なものは？

1. $\forall x. \exists y. \forall z. R(x,z,z)$
2. $\forall x. \exists z. \forall y. R(x,y,z)$
3. $\forall x. \exists z. \forall y. R(x,z,y)$
4. $\forall y. \exists z. \forall x. R(x,z,y)$
5. $\forall y. \exists z. \forall x. R(z,x,y)$



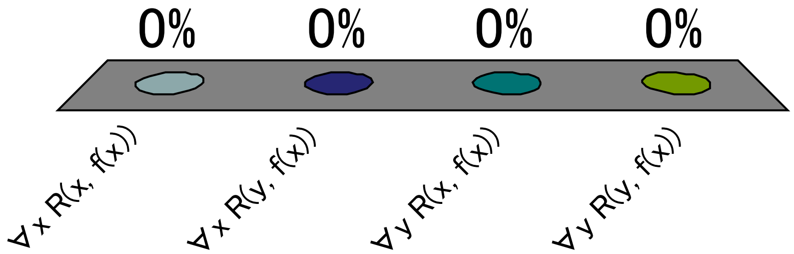
2.2(a)

変数の捕獲

- 論理式の自由変数に項を代入するとき、項の中の変数が束縛されることがある。
- これを、変数の捕獲という。
- 変数の捕獲を避けるため、α変換を行って、捕獲が起きないようにしてから、代入を行う。

∀x R(x,y) の y に f(x) を代入すると？

1. ∀x R(x, f(x))
2. ∀x R(y, f(x))
3. ∀y R(x, f(x))
4. ∀y R(y, f(x))



一階述語論理の意味

2.2(b)

- 解釈（構造）I
  - 領域（空でない集合）
  - 関数記号（および定数記号）の解釈
  - 述語記号（および命題記号）の解釈
- 変数への付値 J
  - 各（自由）変数に領域の要素を対応させる。
- 解釈 I と変数への付値 J が与えられると、論理式 A の真偽 $[[A]]_{I,J}$ が定まる。
  - 閉じた論理式の真偽は解釈 I のみによる。

2.2(b)

解釈

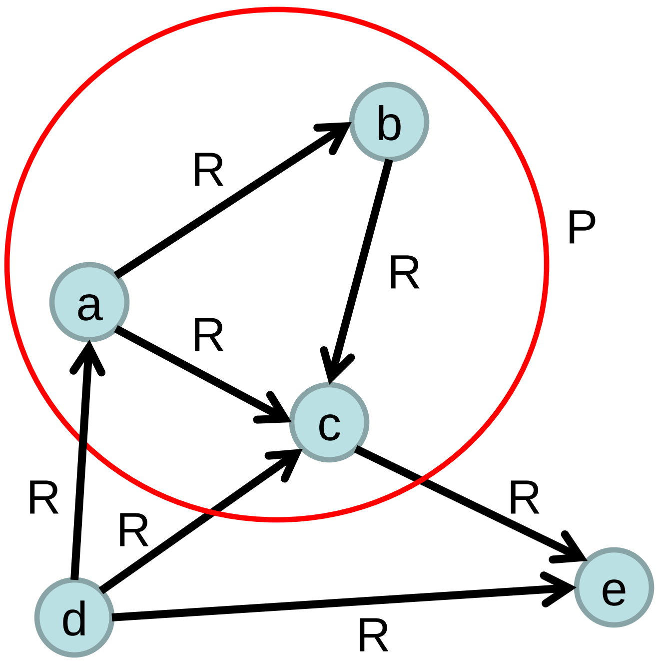
- 解釈 I の領域を U とすると、
- アリティが n の関数記号 f に対して
  - $I(f)$ は U^n から U への関数
  - 定数記号 c に対して、$I(c) \in U$
- アリティが n の述語記号 P に対して
  - $I(P)$ は U^n から $\{\top, \bot\}$ への関数
  - 命題記号 P に対して、$I(P) \in \{\top, \bot\}$

解釈の例

- 解釈 I の領域はグラフのノードの全体
- $U = \{$ a , b , c , d , e $\}$
- I(a) = a

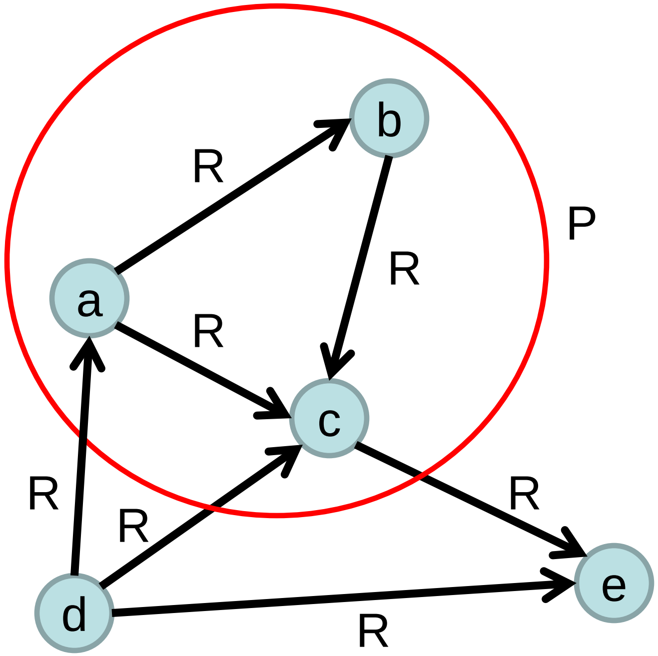
  …
- $\{u \in U \mid I(\mathrm{P})(u) = \mathrm{T}\}$

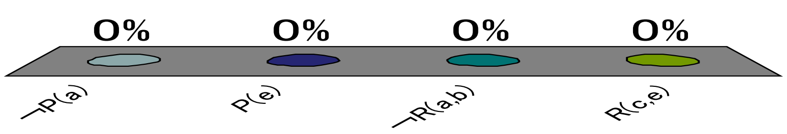
  $= \{$ a , b , c $\}$
- I(R)



真であるのはどれか？

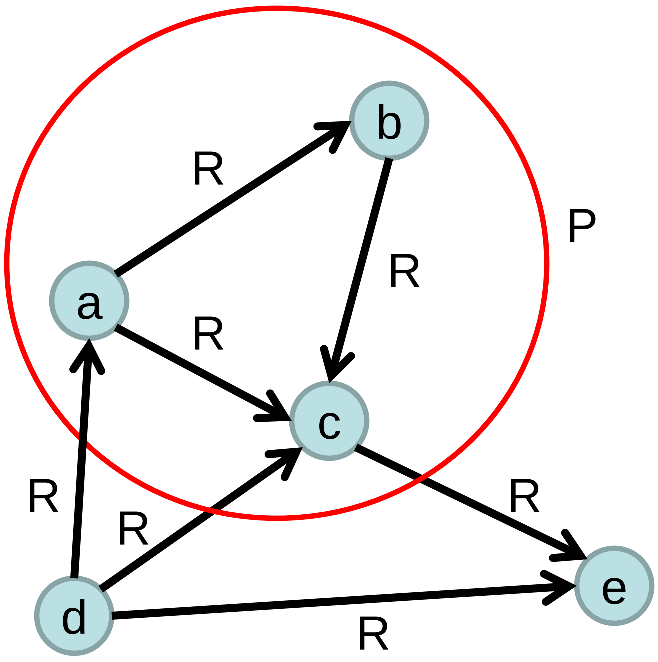
1. ¬P(a)
2. P(e)
3. ¬R(a,b)
4. R(c,e)

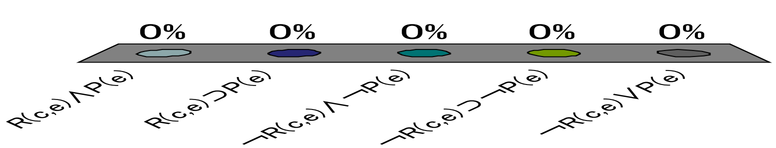




真であるのはどれか？

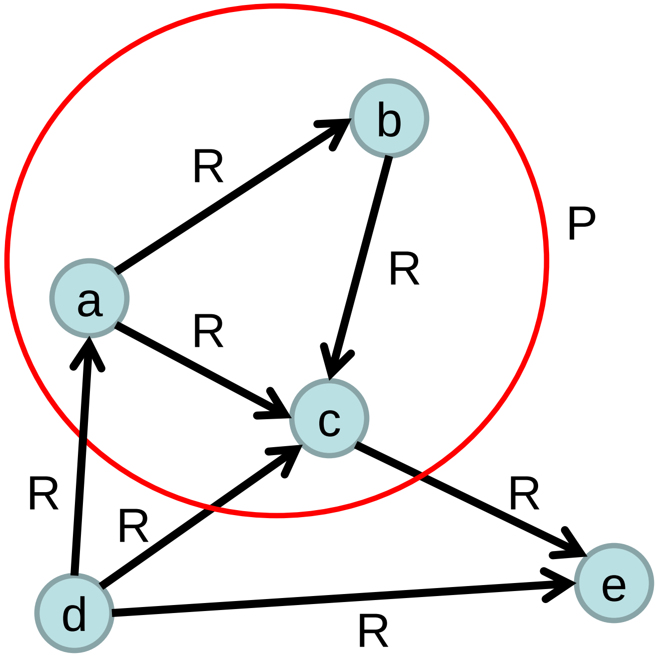
1. R(c,e)∧P(e)
2. R(c,e)⊃P(e)
3. ¬R(c,e)∧¬P(e)
4. ¬R(c,e)⊃¬P(e)
5. ¬R(c,e)∨P(e)

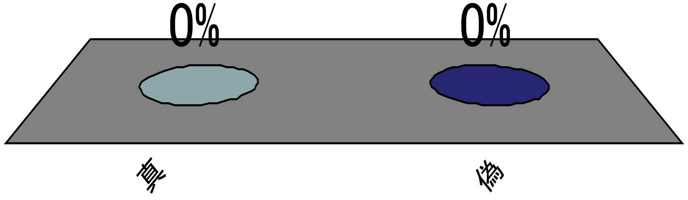




∀x. ∀y. P(x)∧R(x,y)⊃P(y) は

1. 真
2. 偽



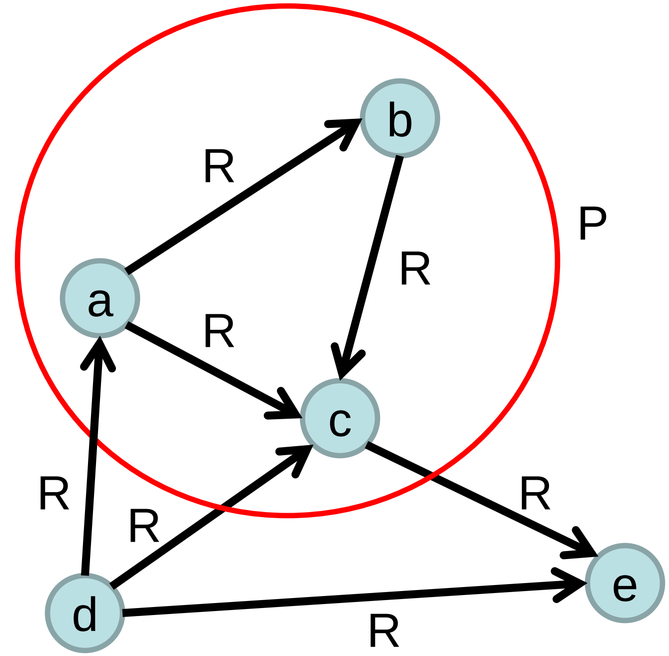


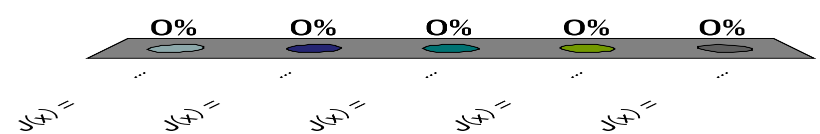
付値

- 自由変数を含む論理式の真偽を定めるには、解釈に加えて、付値が必要。
- 付値 J は、自由変数の全体から領域への関数。

$P(x) \wedge R(x,y) \wedge \neg P(y)$ を真にする付値 J は？

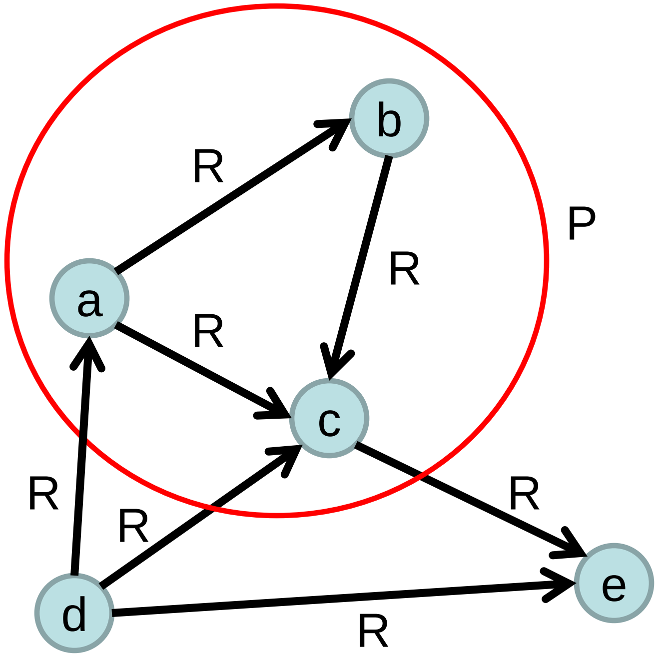
1. $J(x) =$ a　$J(y) =$ b
2. $J(x) =$ b　$J(y) =$ c
3. $J(x) =$ c　$J(y) =$ d
4. $J(x) =$ c　$J(y) =$ e
5. $J(x) =$ d　$J(y) =$ e

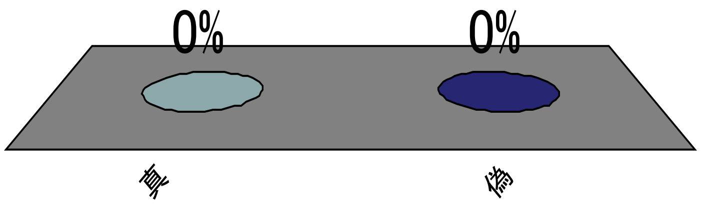




∀x. ∃y. R(x,y) は

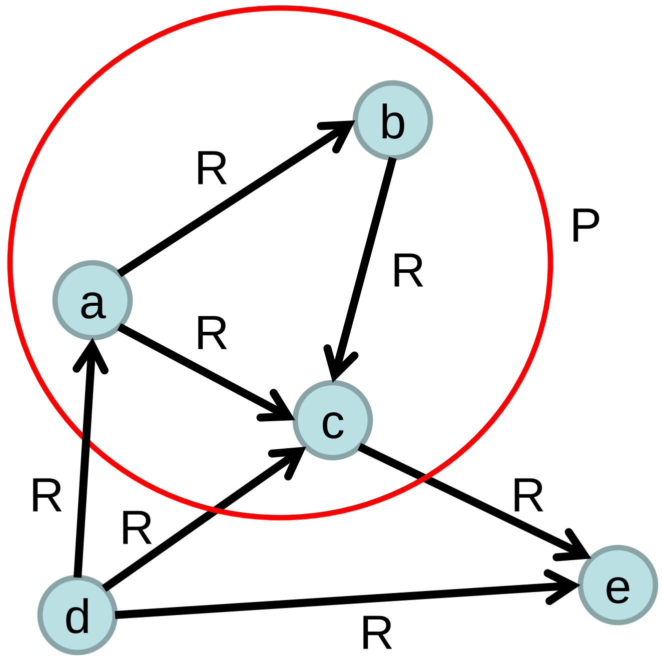
1. 真
2. 偽

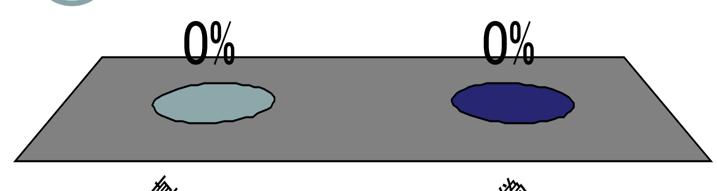




$\forall x.\ P(x) \supset (\exists y.\ R(x,y))$ は

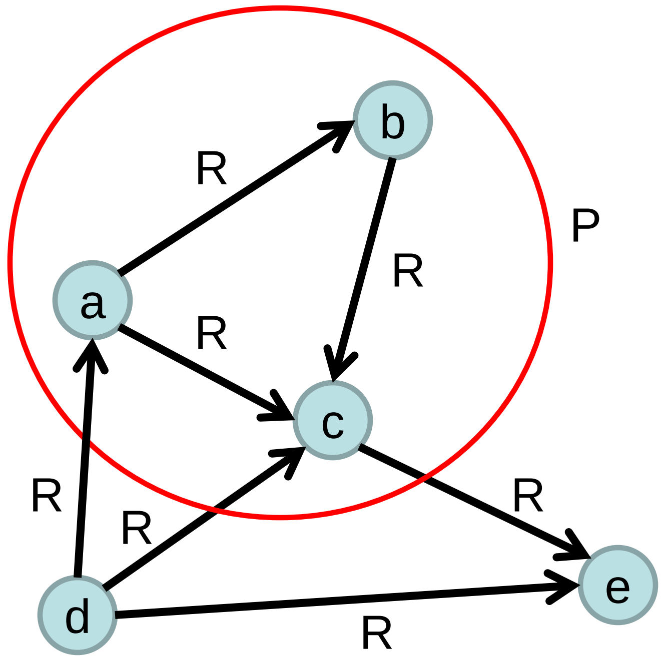
1. 真
2. 偽

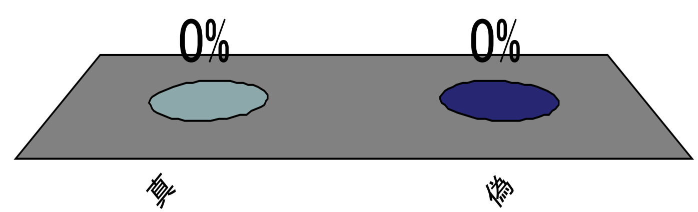




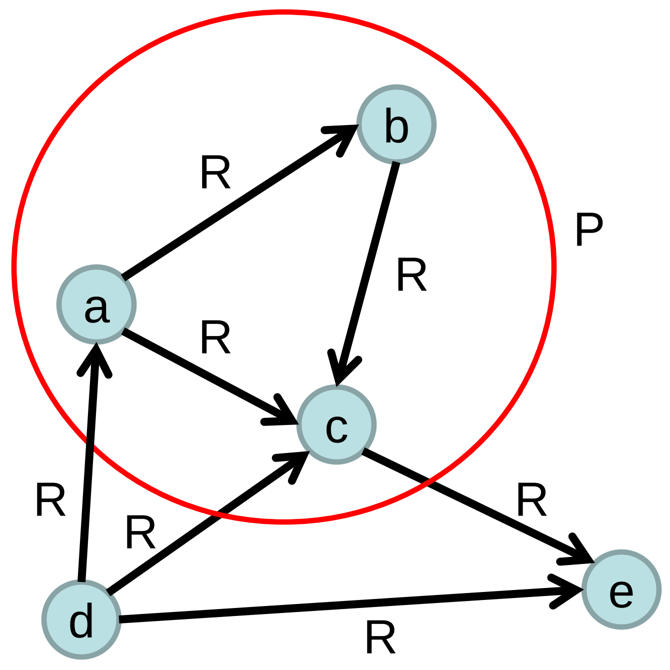
$\forall x. \exists y. P(x) \supset R(x,y)$ は

1. 真
2. 偽





∀x. P(x)⊃R(x,f(x)) が真になるように f の解釈を与えよ。



解釈

2.2(b)

- 項 t に対して $[\![t]\!]_{I,J} \in U$
  - $[\![c]\!]_{I,J} = I(c) \in U$
  - $[\![x]\!]_{I,J} = J(x) \in U$
  - $[\![f(t_1,\ldots,t_n)]\!]_{I,J} = I(f)([\![t_1]\!]_{I,J},\ldots,[\![t_n]\!]_{I,J}) \in U$
- 原子論理式 $P(t_1,\ldots,t_n)$ に対して
  - $[\![P(t_1,\ldots,t_n)]\!]_{I,J} = I(P)([\![t_1]\!]_{I,J},\ldots,[\![t_n]\!]_{I,J}) \in \{\top, \bot\}$
- 論理式 A に対して
  - $[\![A]\!]_{I,J} = \top$ のとき $[\![\neg A]\!]_{I,J} = \bot$
  - $[\![A]\!]_{I,J} = \bot$ のとき $[\![\neg A]\!]_{I,J} = \top$
  - …

2.2(b)

解釈

- 論理式 A に対して
  - 任意の $u \in U$ に対して $[[A]]_{I,J[u/x]}$ = T のとき
    $[[\forall x\, A]]_{I,J}$ = T
  - そうでないとき
    $[[\forall x\, A]]_{I,J} = \perp$
- $J[u/x]$ とは、
  - $y \neq x$ ならば $J[u/x](y) = J(y)$
  - $J[u/x](x) = u$

  という付値。

恒真と充足可能性

2.2(b)

- 恒真
  - どのような解釈と付値のもとでも真になる論理式（例： P(x)∨¬(∀y. P(y))）
- 充足可能
  - ある解釈と付値のもとで真になる論理式（例： P(x)∧(∀y. ¬Q(y))）
- 充足不能
  - 充足可能でないこと（例： P(x)∧(∀y. ¬P(y))）

    Aが充足不能 ⇔ ¬Aが恒真

$P(x) \wedge (\forall y. \neg Q(y))$ を
充足する解釈と付値は？

特に、領域が一つの要素からなる場合を考えよ。

次の論理式を充足する解釈は？

$(\forall x. \forall y. \forall z.\ Q(x,y) \land Q(y,z) \supset Q(x,z))\ \land Q(c,c)$

領域は自然数の全体とし、

定数記号 c は 0 に解釈せよ。

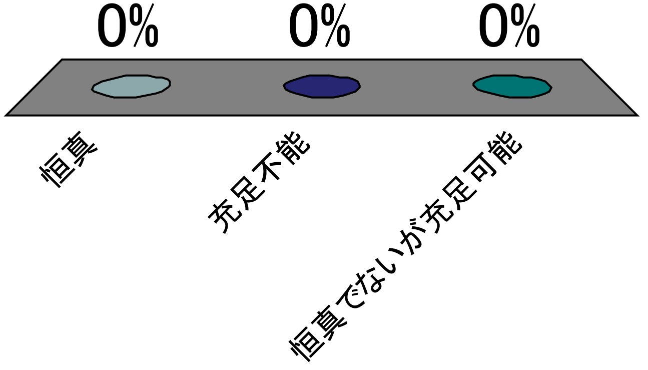
次の論理式を充足する解釈は？

$(\forall x. \forall y. \forall z.\ Q(x,y) \land Q(y,z) \supset Q(x,z))\ \land$
$Q(c,c)\ \land$
$(\forall x. \exists y.\ \neg Q(y,x) \land Q(x,y))$

領域は自然数の全体とし、
定数記号 c は 0 に解釈せよ。

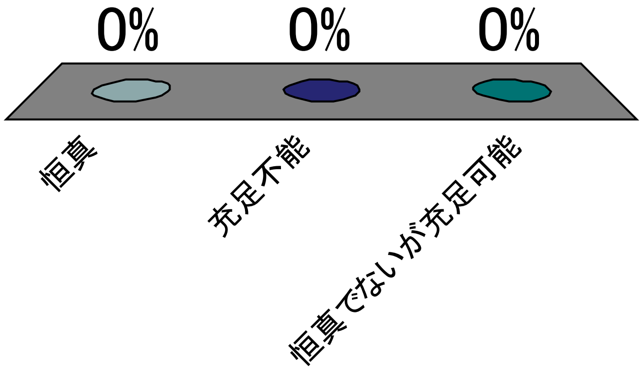
$(\forall x.\ P \vee Q(x)) \supset P \vee (\forall x.\ Q(x))$ は

1. 恒真
2. 充足不能
3. 恒真でないが充足可能



$(\forall x.\ P \land Q(x)) \supset P \land (\forall x.\ Q(x))$ は

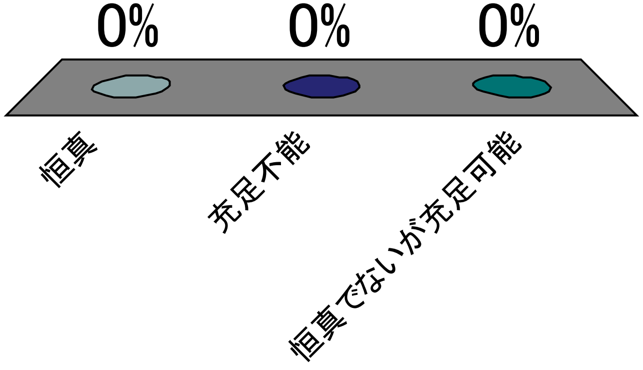
1. 恒真
2. 充足不能
3. 恒真でないが充足可能



$$(\forall x.\ P(x)) \vee (\forall x.\ Q(x)) \supset (\forall x.\ P(x) \vee Q(x))$$

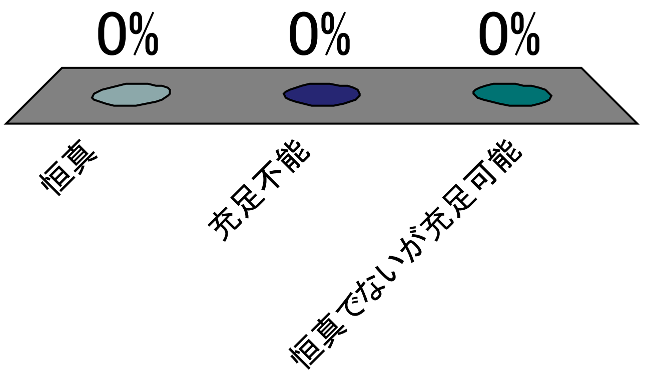
は

1. 恒真
2. 充足不能
3. 恒真でないが充足可能



$(\forall x.\ P(x) \lor Q(x)) \supset (\forall x.\ P(x)) \lor (\forall x.\ Q(x))$ は

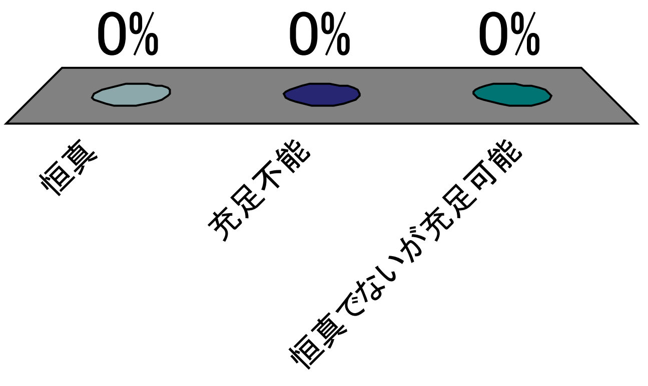
1. 恒真
2. 充足不能
3. 恒真でないが充足可能



$$(\forall x.\ P(x) \land Q(x)) \supset (\forall x.\ P(x)) \land (\forall x.\ Q(x))$$

は

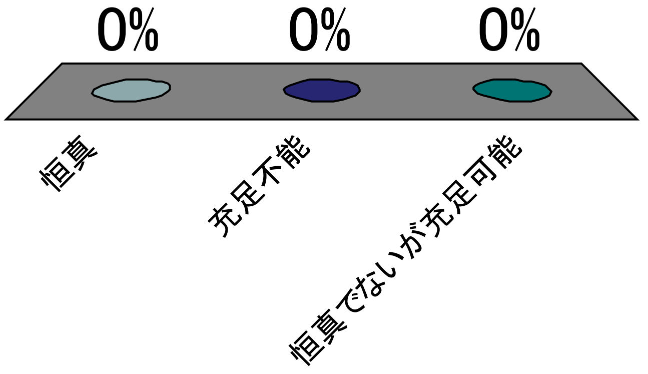
1. 恒真
2. 充足不能
3. 恒真でないが充足可能



$$(\forall x.\exists y.R(x,y)) \wedge (\exists x.\forall y.\neg R(x,y))$$

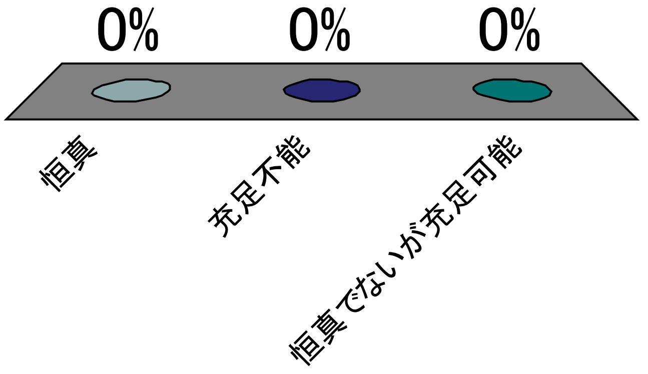
は

1. 恒真
2. 充足不能
3. 恒真でないが充足可能



$(\forall x.\exists y.R(x,y)) \wedge \neg(\exists x.\forall y.R(x,y))$ は

1. 恒真
2. 充足不能
3. 恒真でないが充足可能



述語論理における論理同値

2.2(b)

- $(\forall x.\ P(x)) \wedge (\forall x.\ Q(x))$ と $\forall x.\ P(x) \wedge Q(x)$
  - $(\forall x.\ P(x)) \vee (\forall x.\ Q(x))$ と $\forall x.\ P(x) \vee Q(x)$ は、論理同値でない。
  - $(\forall x.\ P(x)) \vee Q$ と $\forall x.\ P(x) \vee Q$ は、論理同値。
- $(\exists x.\ P(x)) \vee (\exists x.\ Q(x))$ と $\exists x.\ P(x) \vee Q(x)$
- $\neg(\forall x.\ P(x))$ と $\exists x.\ \neg P(x)$
- $\neg(\exists x.\ P(x))$ と $\forall x.\ \neg P(x)$

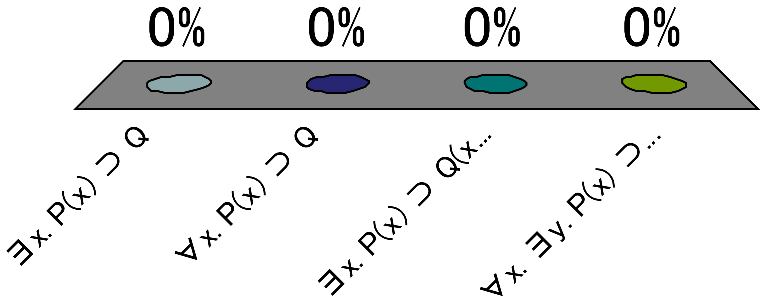
冠頭形

2.2(c)

- x が Q に自由に出現しないならば（この場合、Q は命題定数なので当然だが）、$(\forall x.\ P(x)) \lor Q$ と $\forall x.\ P(x) \lor Q$ は論理同値。
- このような同値変形を繰り返して、∀と∃を頭部に集めることができる。
- その結果得られる論理式を冠頭形という。
- 冠頭形はもとの論理式と論理同値。

(∃x. P(x)) ⊃ Q の冠頭形は？

1. ∃x. P(x) ⊃ Q
2. ∀x. P(x) ⊃ Q
3. ∃x. P(x) ⊃ Q(x)
4. ∀x. ∃y. P(x) ⊃ Q(y)



次の論理式の冠頭形は？

$(\forall x.\ \exists y.\ Q(x,y)) \land (\forall x.\ P(x))$

次の論理式の冠頭形は？

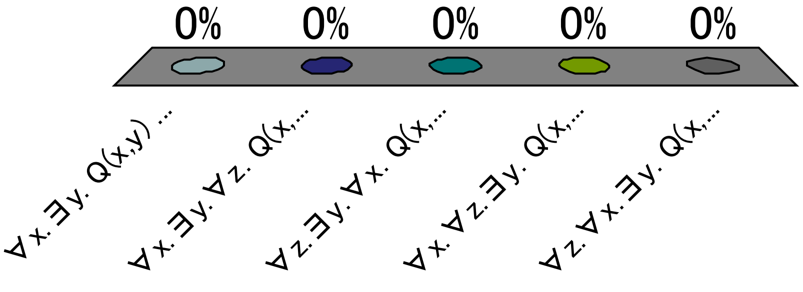
$(\forall x. \exists y. Q(x,y)) \vee (\forall x. P(x))$

次の論理式の冠頭形は？

$(\forall x.\ \exists y.\ Q(x,y)) \lor (\forall z.\ P(z))$

$(\forall x. \exists y. Q(x,y)) \land (\forall x. P(x))$ の冠頭形として正しくないのは

1. $\forall x. \exists y. Q(x,y) \land P(x)$
2. $\forall x. \exists y. \forall z. Q(x,y) \land P(z)$
3. $\forall z. \exists y. \forall x. Q(x,y) \land P(z)$
4. $\forall x. \forall z. \exists y. Q(x,y) \land P(z)$
5. $\forall z. \forall x. \exists y. Q(x,y) \land P(z)$



次の論理式の冠頭形は？

$(\forall x. \forall y. \forall z.\ Q(x,y) \land Q(y,z) \supset Q(x,z)) \land$
$Q(c,c) \land$
$(\forall x. \exists y.\ \neg Q(y,x) \land Q(x,y))$

Skolem化

- f を新しい関数記号としたとき、
  $\forall x. \exists y.\ A[x,y]$ という形の論理式と、
  $\forall x.\ A[x,f(x)]$ という形の論理式は、
  充足可能性が等価。
  - このような変形をSkolem化という。
  - 片方が充足可能ならばもう片方も充足可能。
  - f はSkolem関数という。
- 一般にSkolem化の前と後は論理同値でない。

メタ変数

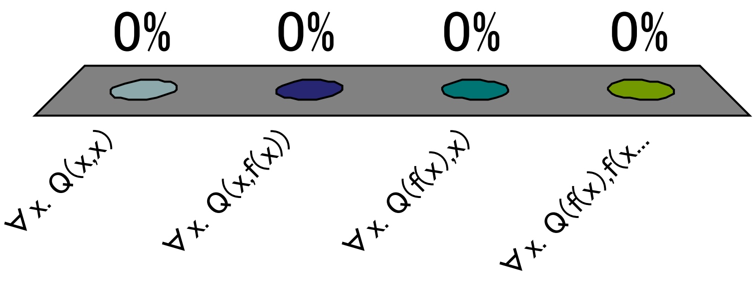
2.1(c)

- A[x,y] という式は、自由変数 x と y を含む（かもしれない）論理式を表している。
  - A は述語記号ではない。
  - A[x,f(x)] は、A[x,y] の y に f(x) を代入した結果。
- そもそも、A とか B などという変数は、論理式を「指す」変数。
- 一般に、構文上の対象を指す変数は、メタ変数と呼ばれる。
  - 構文上の変数は、対象変数ともいう。

$\forall x. \exists y. A[x,y]$ が充足可能ならば、$\forall x. A[x,f(x)]$ も充足可能であることを説明せよ。

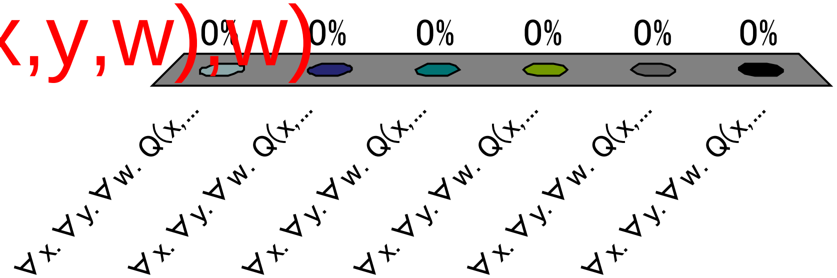
∀x. ∃y. Q(x,y) を Skolem化すると

1. ∀x. Q(x,x)
2. ∀x. Q(x,f(x))
3. ∀x. Q(f(x),x)
4. ∀x. Q(f(x),f(x))



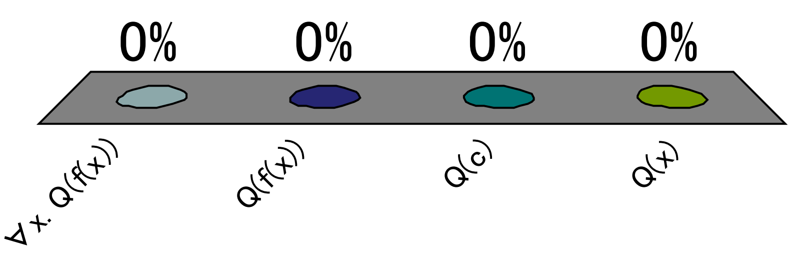
∀x.∀y.∃z.∀w. Q(x,y,z,w) をSkolem化すると

1. ∀x.∀y.∀w. Q(x,y,f(x),w)
2. ∀x.∀y.∀w. Q(x,y,f(y),w)
3. ∀x.∀y.∀w. Q(x,y,f(w),w)
4. ∀x.∀y.∀w. Q(x,y,f(x,y),w)
5. ∀x.∀y.∀w. Q(x,y,f(y,w),w)
6. ∀x.∀y.∀w. Q(x,y,f(x,y,w),w)



∃y. Q(y) を Skolem化すると

1. ∀x. Q(f(x))
2. Q(f(x))
3. Q(c)
4. Q(x)



次の論理式をSkolem化せよ。

$\forall x. \exists y. \forall u. \forall v. \forall w.$ $A[x,y]$

$(Q(u,v) \land Q(v,w) \supset Q(u,w)) \land$

$Q(c,c) \land$

$(\neg Q(y,x) \land Q(x,y))$

次の論理式を充足する解釈は？

$\forall x. \forall u. \forall v. \forall w.$

$(Q(u,v) \land Q(v,w) \supset Q(u,w)) \land$

$Q(c,c) \land$

$(\neg Q(f(x),x) \land Q(x,f(x)))$

領域は自然数の全体とし、

定数記号 c は 0 に解釈せよ。