集合と関係＋

- 集合とは？

1.1(a)

- 集合の等しさとは？
  - 外延的な等しさ
  - 一対一の対応

- 空集合とは？
  - {}
  - φ

1.1(b)

1.1(d)

- 結び（合併）とは？
- 交わり（共通部分）とは？

1.1(e)

- 直積とは？

  $A \times B = \{ \langle a,b \rangle \mid a \in A,\ b \in B \}$

- A^nとは？

  たとえば、$A^3 = A \times A \times A$

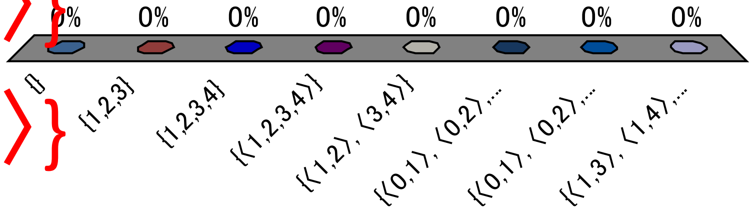
  $A^0 = \{ \langle \rangle \}$

- 直和とは？

  ここでは、$A + B = \{0\} \times A \cup \{1\} \times B$ と定義。

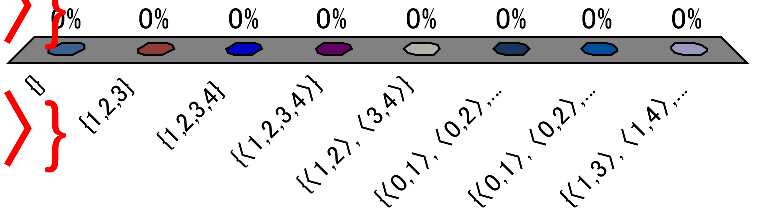
{1,2}×{3,4} は

1. {}
2. {1,2,3}
3. {1,2,3,4}
4. {〈1,2,3,4〉}
5. {〈1,2〉,〈3,4〉}
6. {〈0,1〉,〈0,2〉,〈1,2〉,〈1,3〉}
7. {〈0,1〉,〈0,2〉,〈1,3〉,〈1,4〉}
8. {〈1,3〉,〈1,4〉,〈2,3〉,〈2,4〉}



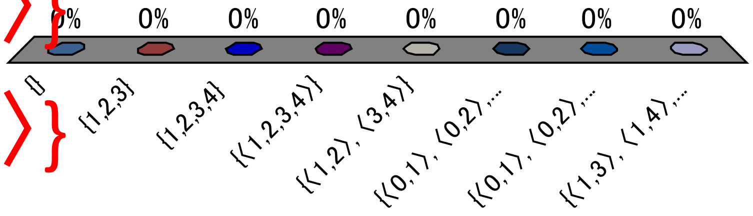
$\{1,2\} \times \{\}$ は

1. $\{\}$
2. $\{1,2,3\}$
3. $\{1,2,3,4\}$
4. $\{\langle 1,2,3,4 \rangle\}$
5. $\{\langle 1,2 \rangle, \langle 3,4 \rangle\}$
6. $\{\langle 0,1 \rangle, \langle 0,2 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle\}$
7. $\{\langle 0,1 \rangle, \langle 0,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle\}$
8. $\{\langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle\}$



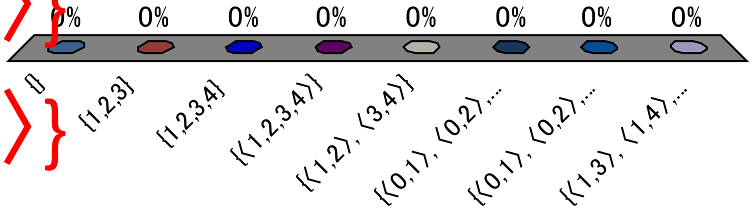
{1,2}＋{3,4} は

1. {}
2. {1,2,3}
3. {1,2,3,4}
4. {〈1,2,3,4〉}
5. {〈1,2〉, 〈3,4〉}
6. {〈0,1〉, 〈0,2〉, 〈1,2〉, 〈1,3〉}
7. {〈0,1〉, 〈0,2〉, 〈1,3〉, 〈1,4〉}
8. {〈1,3〉, 〈1,4〉, 〈2,3〉, 〈2,4〉}



{1,2}＋{2,3}は

1. {}
2. {1,2,3}
3. {1,2,3,4}
4. {〈1,2,3,4〉}
5. {〈1,2〉,〈3,4〉}
6. {〈0,1〉,〈0,2〉,〈1,2〉,〈1,3〉}
7. {〈0,1〉,〈0,2〉,〈1,3〉,〈1,4〉}
8. {〈1,3〉,〈1,4〉,〈2,3〉,〈2,4〉}



- 部分集合とは？ 1.1(c)

- 冪集合とは？ 1.1(f)

  2^A とは、Aの部分集合の全体。P(A) とも書く。

- 関数とは？

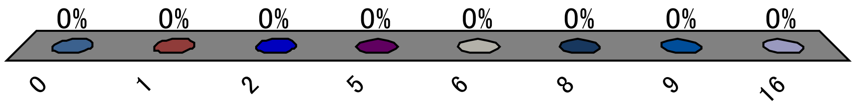
  定義域と値域

- 関数空間とは？

  B^A とは、AからBへの関数の全体。$A \to B$ とも。

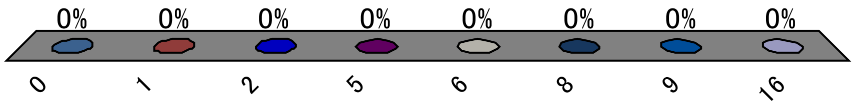
{1,2}×{3,4,5}の個数は

1. 0
2. 1
3. 2
4. 5
5. 6
6. 8
7. 9
8. 16



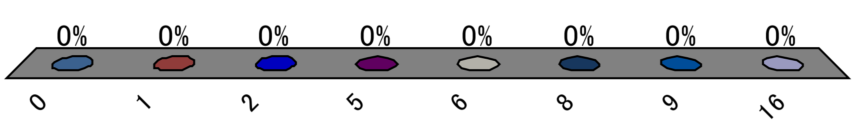
$2^{\{3,4,5\}}$の個数は

1. 0
2. 1
3. 2
4. 5
5. 6
6. 8
7. 9
8. 16



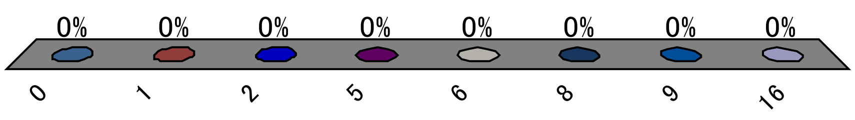
$2^{\{3,4,5,6\}}$の個数は

1. 0
2. 1
3. 2
4. 5
5. 6
6. 8
7. 9
8. 16



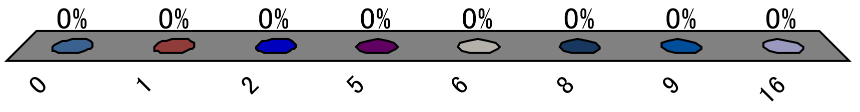
$\{3,4,5\}^{\{1,2\}}$の個数は

1. 0
2. 1
3. 2
4. 5
5. 6
6. 8
7. 9
8. 16



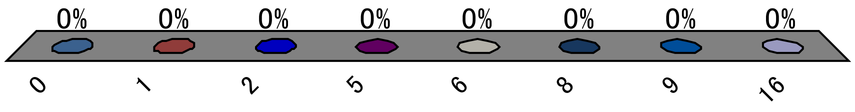
$\{3,4,5\} \times \{3,4,5\}$の個数は

1. 0
2. 1
3. 2
4. 5
5. 6
6. 8
7. 9
8. 16



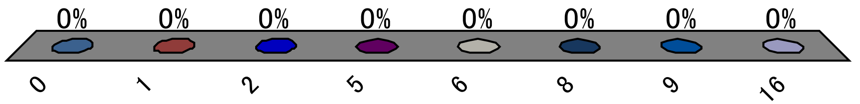
$\{1,2\}^{\{3,4,5\}}$の個数は

1. 0
2. 1
3. 2
4. 5
5. 6
6. 8
7. 9
8. 16



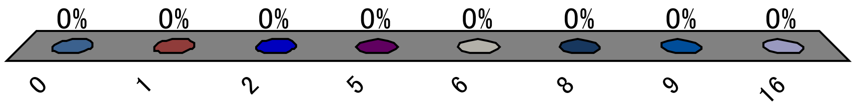
$\{1,2\}\times\{1,2\}\times\{1,2\}$の個数は

1. 0
2. 1
3. 2
4. 5
5. 6
6. 8
7. 9
8. 16



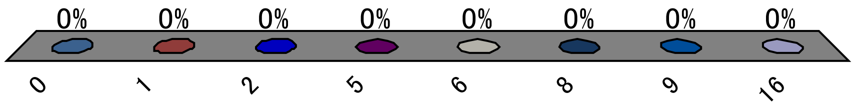
$\{\}^{\{3,4,5\}}$の個数は

1. 0
2. 1
3. 2
4. 5
5. 6
6. 8
7. 9
8. 16



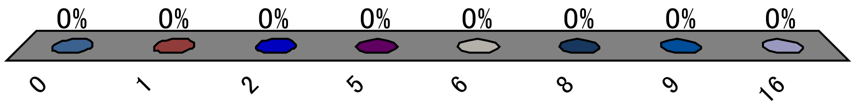
$\{1,2\}^{\{\}}$の個数は

1. 0
2. 1
3. 2
4. 5
5. 6
6. 8
7. 9
8. 16



$\{\}^{\{\}}$の個数は

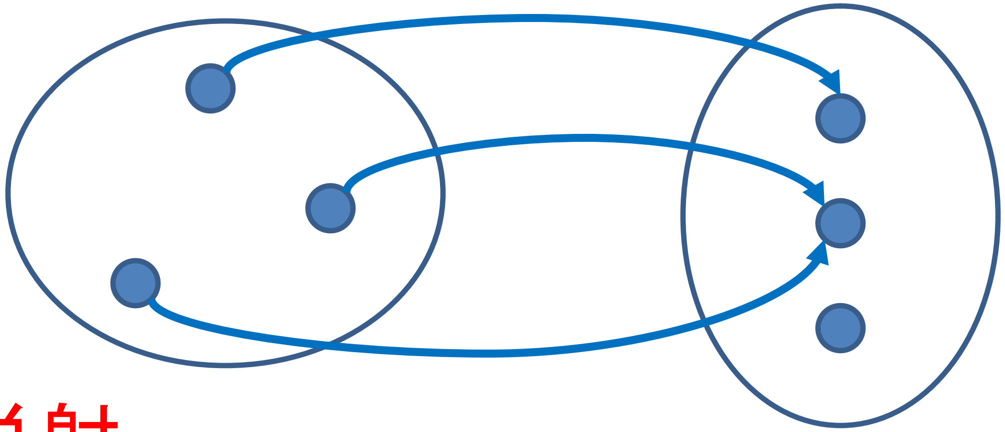
1. 0
2. 1
3. 2
4. 5
5. 6
6. 8
7. 9
8. 16



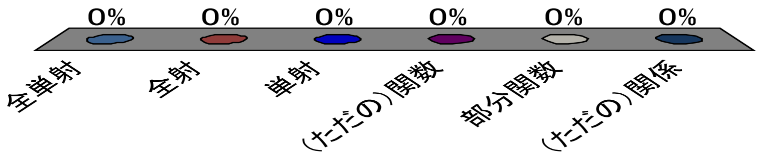
1.1(f)

- 単射とは？
- 全射とは？
- 全単射とは？
  - 一対一の対応
  - 逆関数
- 部分関数とは？

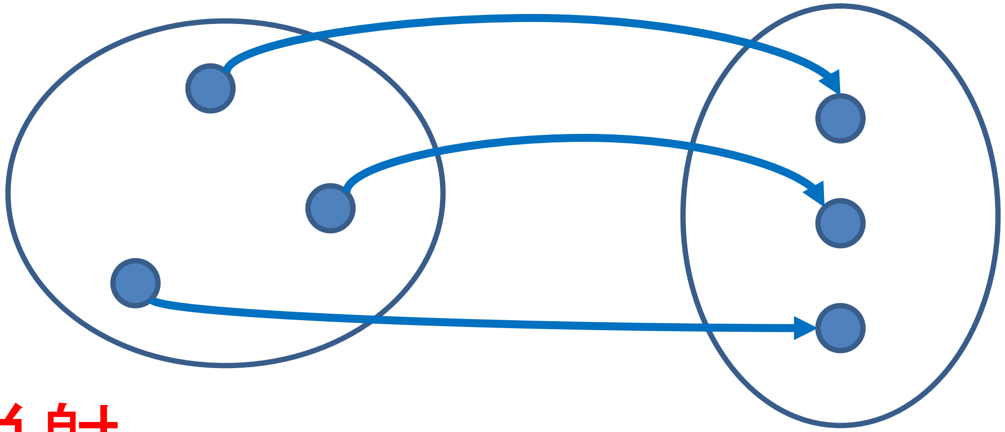
もっとも適切なのは



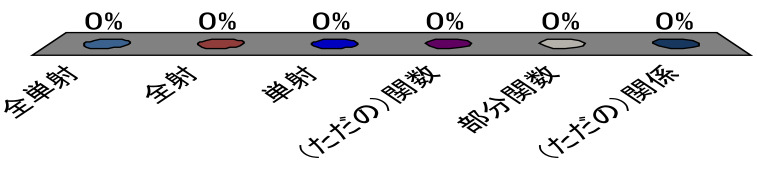
1. 全単射
2. 全射
3. 単射
4. （ただの）関数
5. 部分関数
6. （ただの）関係



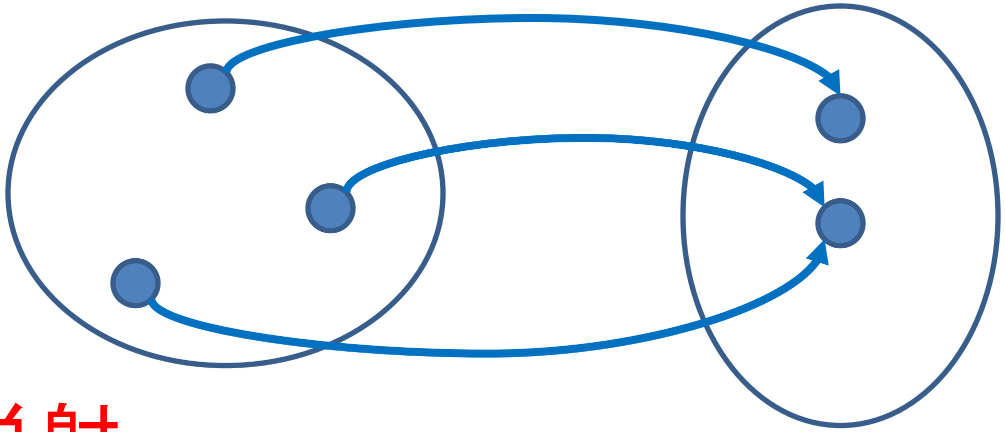
もっとも適切なのは



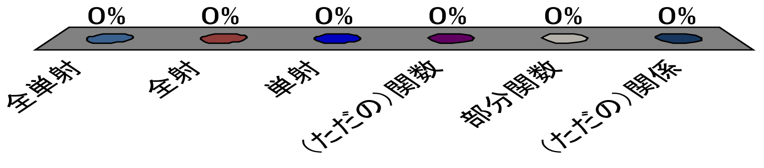
1. 全単射
2. 全射
3. 単射
4. （ただの）関数
5. 部分関数
6. （ただの）関係



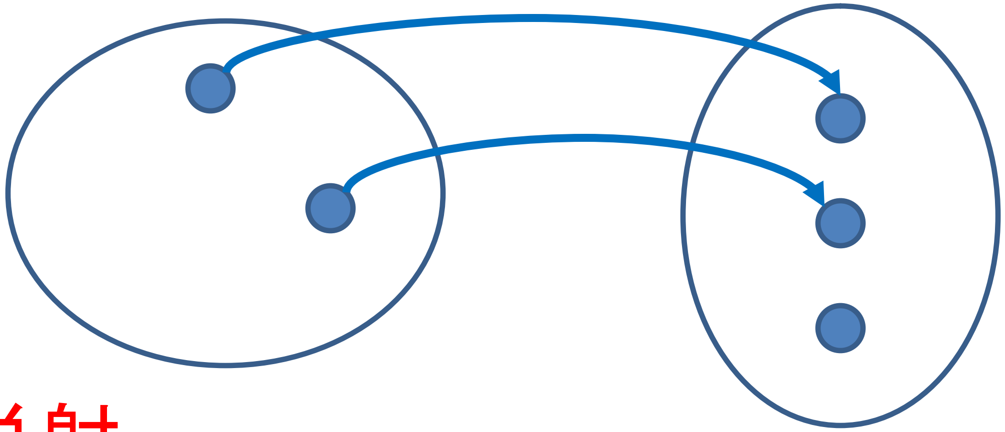
もっとも適切なのは



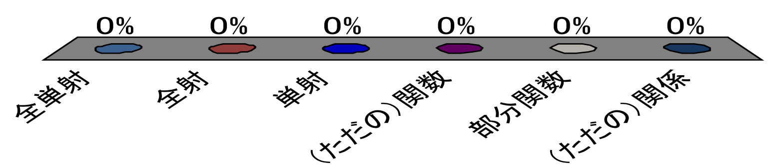
1. 全単射
2. 全射
3. 単射
4. （ただの）関数
5. 部分関数
6. （ただの）関係



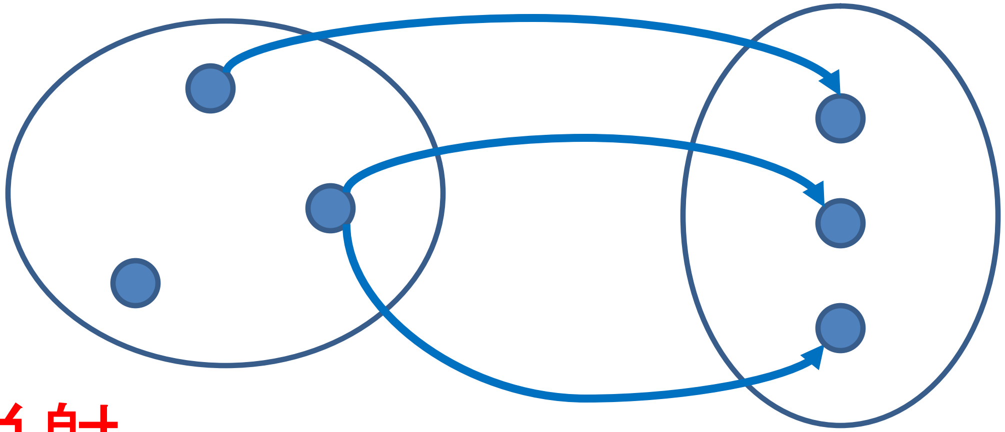
もっとも適切なのは



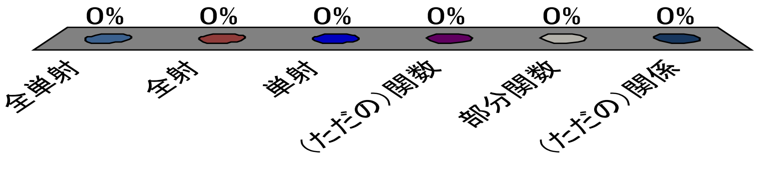
1. 全単射
2. 全射
3. 単射
4. （ただの）関数
5. 部分関数
6. （ただの）関係



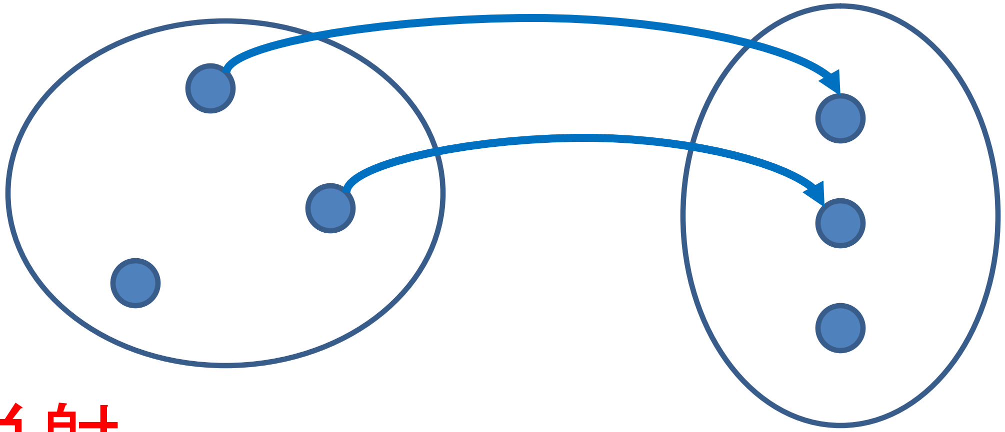
もっとも適切なのは



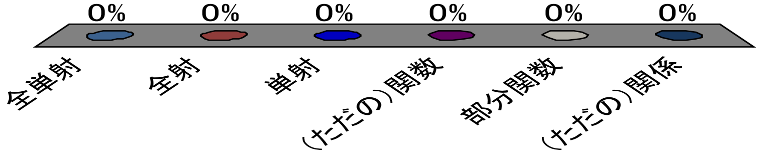
1. 全単射
2. 全射
3. 単射
4. (ただの)関数
5. 部分関数
6. (ただの)関係



もっとも適切なのは



1. 全単射
2. 全射
3. 単射
4. （ただの）関数
5. 部分関数
6. （ただの）関係



- N とは？
- Z とは？
- Q とは？
- R とは？

- N からN × Nへの全単射を一つ与えよ。

  たとえば、$f(x,y) = (x+y+1)(x+y)/2 + y$ とおいて、

  f の逆関数を考えればよい。

- $C^{A\times B}$ と $(C^B)^A$ が一対一に対応することを示せ。

  $f\in C^{A\times B}$ とする。

  $a\in A$ に対して、

  「$b\in B$ に $f(a,b)$ を対応させる関数」を

  対応させる。「…」は C^B の要素。

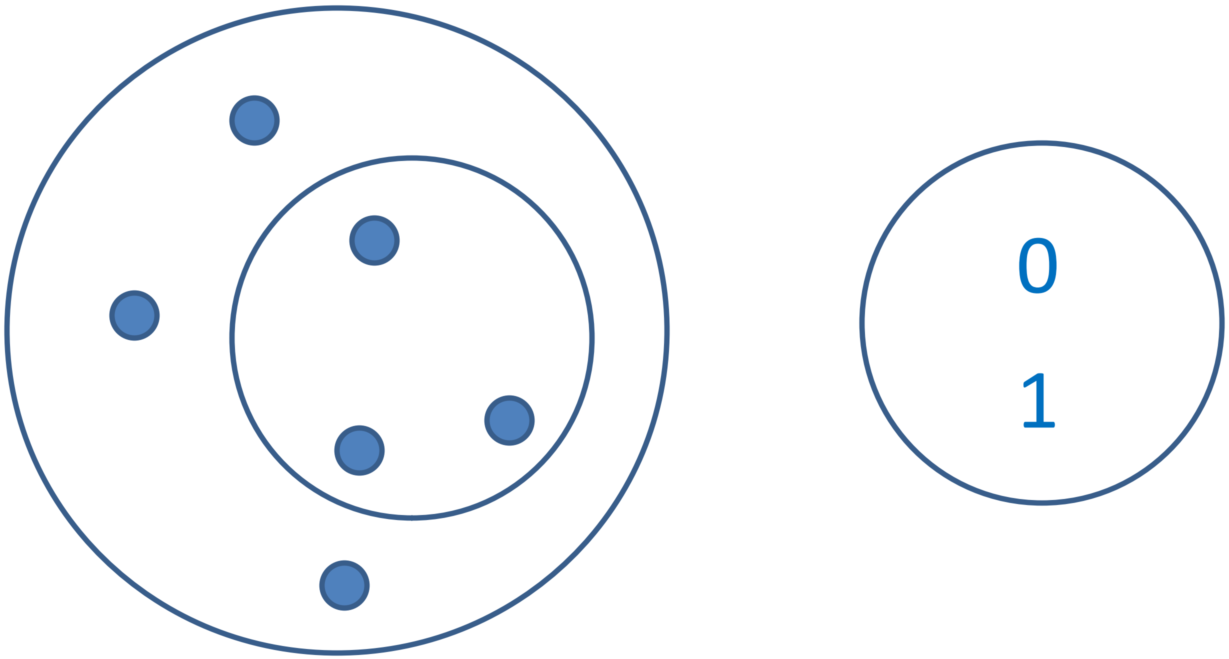
  したがって、$f\in C^{A\times B}$ に $(C^B)^A$ の要素が対応する。

  この対応は $C^{A\times B}$ から $(C^B)^A$ への全単射。

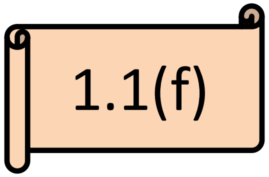
- 特性関数とは？

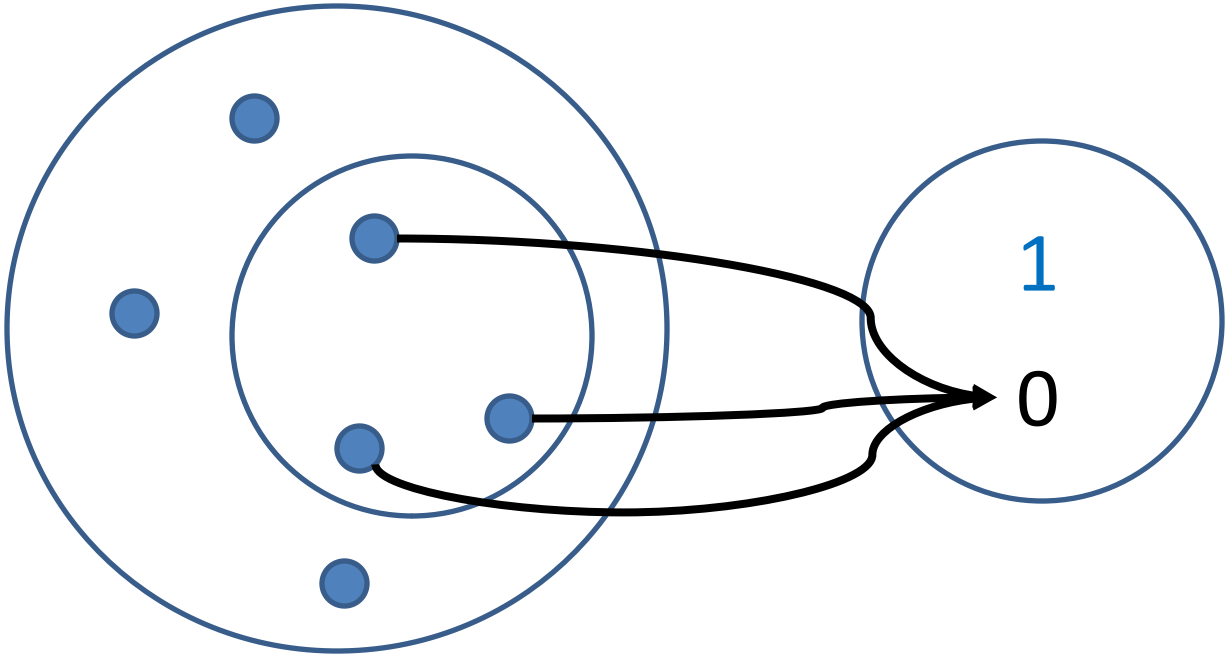
1.1(f)

- 特性関数とは？

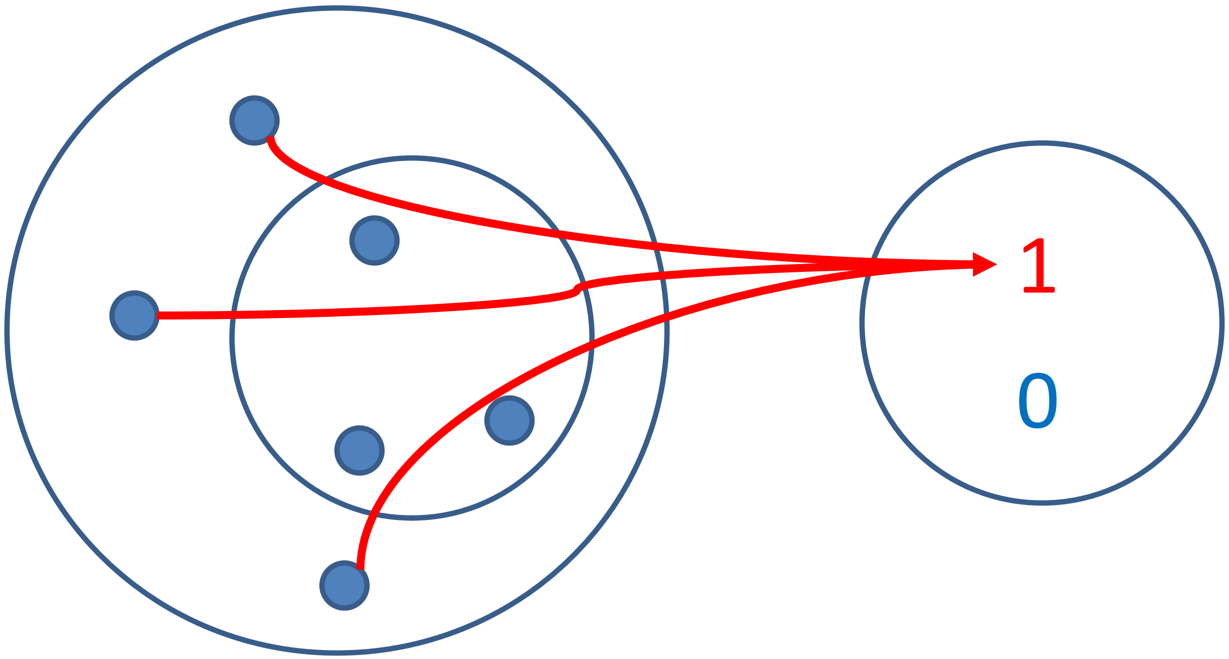


- 特性関数とは？





- 特性関数とは？



1.1(f)

- 特性関数とは？

特性関数によって、

2^A と $\{0,1\}^A$ が一対一に対応。

$\{0,1\}$ を **2** と書くと、

2^A と $\mathbf{2}^A$ が一対一に対応。

- 集合族とは？

1.1(g)

たとえば、自然数 i に対して、

A_i を、i より大きい素数の集合とする。

$\{A_i\}_{i \in N}$ は集合族。

$A_0 = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$

$A_1 = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$

$A_2 = \{3, 5, 7, \ldots\}$

$A_3 = \{5, 7, \ldots\}$

$A_4 = \{5, 7, \ldots\}$

…

1.1(g)

- $\bigcup_{i \in N} A_i$ とは？

- $\bigcap_{i \in N} A_i$ とは？

1.1(h)

- Π集合とは？

$$\Pi_{i\in\{0,1,2\}} A_i = A_0 \times A_1 \times A_2$$

$$\Pi_{i\in N} A_i = A_0 \times A_1 \times A_2 \times \ldots$$

$\langle x_0, x_1, x_2, \ldots \rangle \in \Pi_{i\in N} A_i$ とは

$$x_0 \in A_0$$

$$x_1 \in A_1$$

$$x_2 \in A_2$$

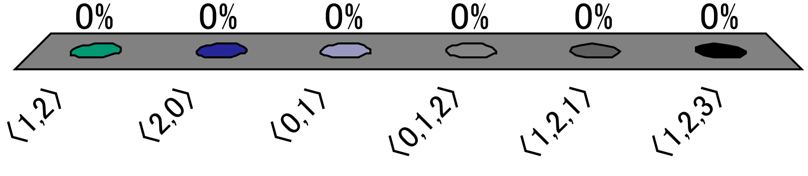
$$\ldots$$

N の要素間の順序を想定していることに注意。

$A_0 = \{1,2\}$ $A_1 = \{0,2\}$ $A_2 = \{0,1\}$のとき

$\prod_{i\in\{0,1,2\}} A_i$に含まれるのは

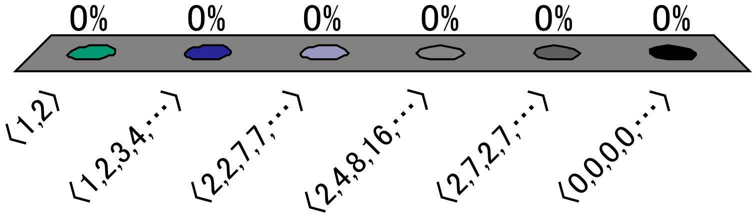
1. $\langle 1,2 \rangle$
2. $\langle 2,0 \rangle$
3. $\langle 0,1 \rangle$
4. $\langle 0,1,2 \rangle$
5. $\langle 1,2,1 \rangle$
6. $\langle 1,2,3 \rangle$



A_iが、iより大きい素数の集合であるとき

$\Pi_{i\in N} A_i$に含まれるのは

1. 〈1,2〉
2. 〈1,2,3,4,…〉
3. 〈2,2,7,7,…〉
4. 〈2,4,8,16,…〉
5. 〈2,7,2,7,…〉
6. 〈0,0,0,0,…〉



1.1(h)

- 具体的に $\Pi_{i \in N} A_i$ の要素を一つ定義せよ。

たとえば、

f(i) = 1 から i までの積 +1 の

最大の素因数

と定義して、

$\langle f(0), f(1), f(2), \ldots \rangle$

1.1(h)

- Π集合とは？

  A_i が常に同一の集合 A に等しければ、

  $\Pi_{i \in N} A = A \times A \times A \times \ldots$

  $\langle x_0, x_1, x_2, \ldots \rangle \in \Pi_{i \in N} A$ とは

  $x_0 \in A$

  $x_1 \in A$

  $x_2 \in A$

  …

  A^N に等しい（一対一に対応）。

- Π集合とは？

  より一般的に、

  $\Pi_{i \in I} A_i$ とは、集合 I から

  集合 $\cup_{i \in I} A_i$ への関数 f であって、

  任意の $i \in I$ に対して $f(i) \in A_i$ となる

  ものの全体と定義される。

  I が非可算でも定義される。

  I は添数集合と呼ばれる。

1.1(h)

- ∑集合とは？

$$\sum_{i\in\{0,1,2\}} A_i = A_0 + A_1 + A_2$$

$$\sum_{i\in N} A_i = A_0 + A_1 + A_2 + \dots$$

$$\sum_{i\in N} A_i = \{ \langle i,a \rangle \mid i\in N,\ a\in A_i \}$$

1.2(a)

- 二項関係とは？

一般に集合A上の二項関係Rとは、

A×Aの部分集合のこと。$R \subseteq A \times A$

つまり、Aのペアの集合。

Rが二項関係であるとき、

$$\langle x,y \rangle \in R$$

であることを

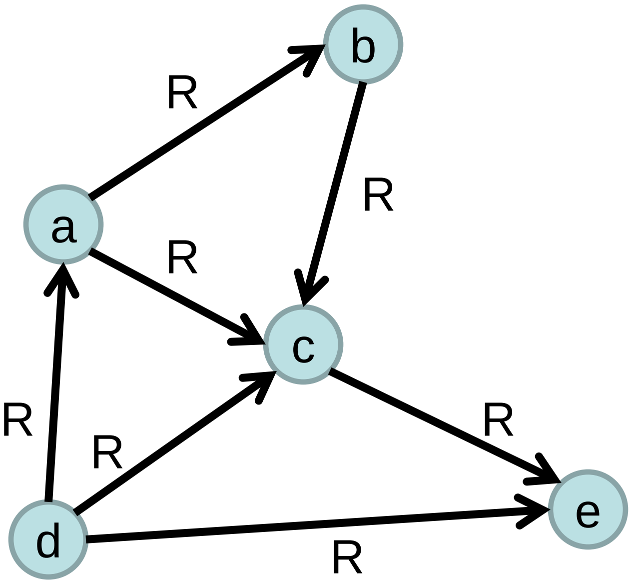
$$xRy$$

と書く。

- 二項関係とは？

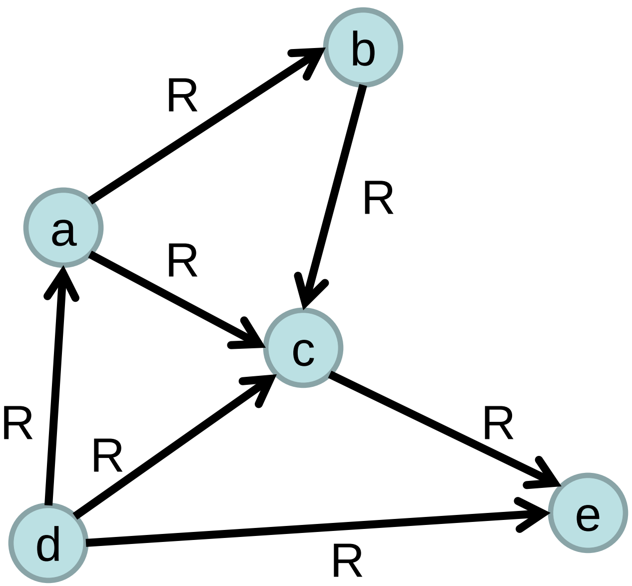
1.2(a)

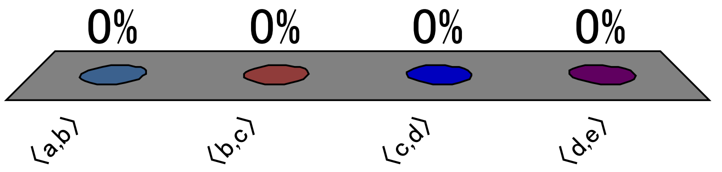
たとえば、ある有向グラフの頂点の集合をA、R={(x,y) | 頂点xから頂点yへ辺がある}とすると、RはA上の二項関係である。



Rが成り立たないのは

1. 〈a,b〉
2. 〈b,c〉
3. 〈c,d〉
4. 〈d,e〉





- 二項関係の合成とは？

1.2(b)

RoS = { 〈x,z〉 | あるyが存在して

〈x,y〉∈R かつ 〈y,z〉∈S }

有効グラフの場合、RとR自身の合成RoRは、

{(x,y) | 頂点xから頂点yへ

長さ2の経路がある}

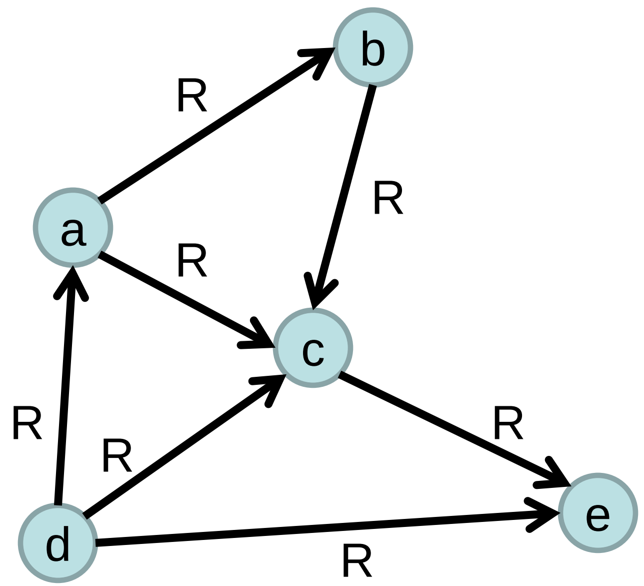
に一致する。

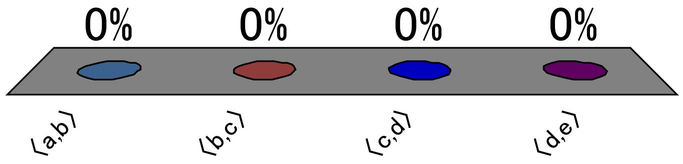
SoR と書くこともあるので注意。

（関数合成に倣っている。）

RoRが成り立つのは

1. 〈a,b〉
2. 〈b,c〉
3. 〈c,d〉
4. 〈d,e〉





1.2(b)

- R^nとは？

  たとえば、$R^3 = R \circ R \circ R$

  $R^0 = Id = \Delta = \{ \langle x,x \rangle \}$

  $R^1 = R$

1.2(b)

- 二項関係の閉包とは？

  $R^* = \bigcup_{i \in N} R^i = R^0 \cup R^1 \cup R^2 \cup \ldots$

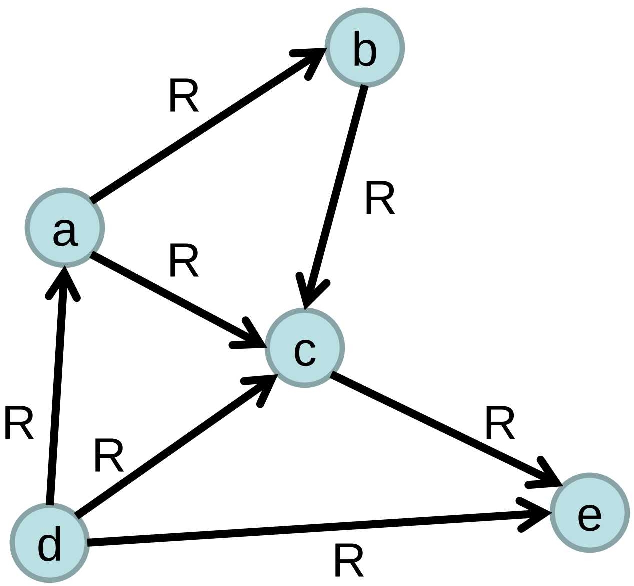
  有効グラフの場合、R*は、

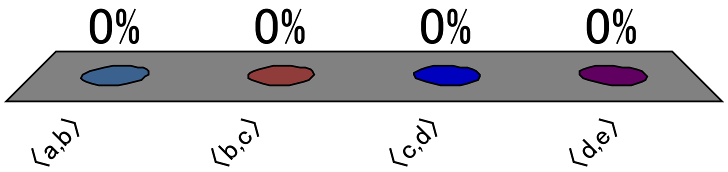
  $\{ \langle x,y \rangle \mid$ 頂点xから頂点yへ経路がある $\}$

  に一致する。

R*が成り立たないのは

1. 〈a,b〉
2. 〈b,c〉
3. 〈c,d〉
4. 〈d,e〉





1.2(b)

- $(R^*)^*$ は R^* に等しいことを示せ。

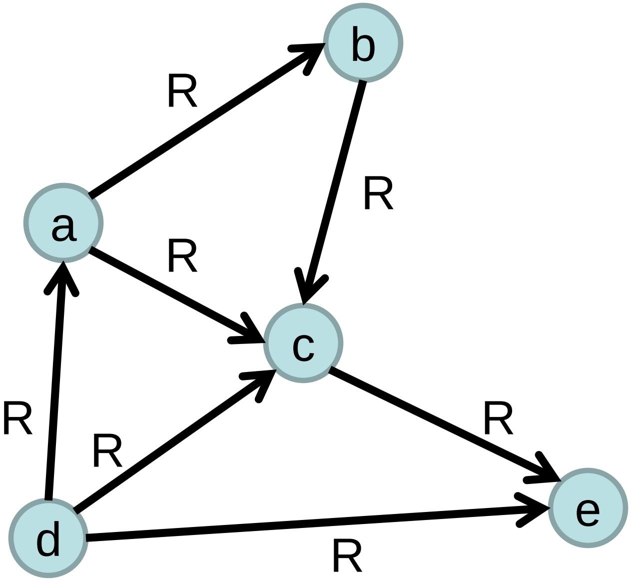
1.2(c)

- 二項関係が反射的とは？
- 二項関係が推移的とは？
- 二項関係の反射推移閉包とは？

二項関係Rの反射推移閉包とは、Rを含み、
反射的かつ推移的な二項関係の最小のもの。
最小の二項関係は存在する。なぜなら、
そのような二項関係のすべての共通部分が
最小の二項関係となる。

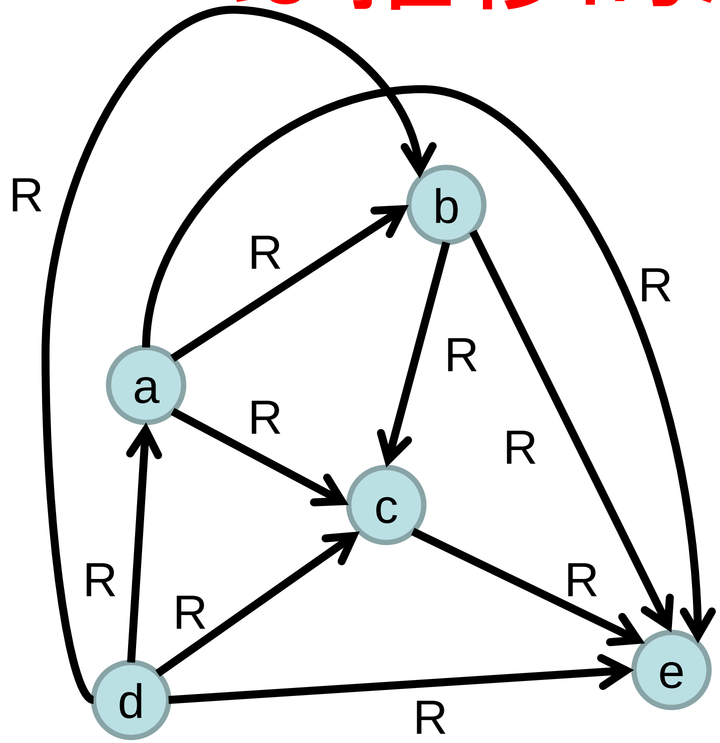
Rは推移的か

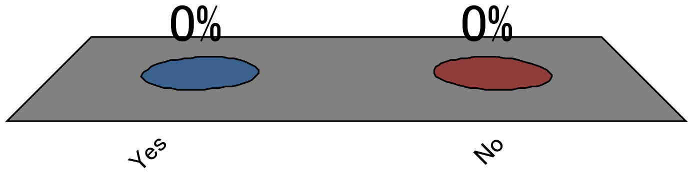
1. Yes
2. No



Rは推移的か

1. Yes
2. No





1.2(c)

- Rの反射推移閉包がR*であることを示せ。

Rの反射推移閉包をSと置く。

$R^* \subseteq S$を示すには、

$R^* = \bigcup_{i \in N} R^i = R^0 \cup R^1 \cup R^2 \cup \dots$ なので、

任意の$i \geqq 0$に対して$R^i \subseteq S$をいえばよい。

iに関する数学的帰納法による。

$i=0$のとき、$R^0 = Id = \{ \langle x,x \rangle \}$ なので、

Sの反射性より、$R^i \subseteq S$が成り立つ。

また、$R^i \subseteq S$と仮定すると、$R \subseteq S$および

Sの推移性より、$R^{i+1} = R^i o R \subseteq S$

1.2(c)

- Rの反射推移閉包がR*であることを示せ。

S⊆R*を示すには、
SがRを含む最小の反射的かつ推移的な
二項関係なので、
R*がRを含み、
反射的かつ推移的であることを示せばよい。

$R^* = \bigcup_{i \in N} R^i = R^0 \cup R^1 \cup R^2 \cup \ldots$ なので、

$R = R^1 \subseteq R^*$ （R*がRを含み）

$Id = R^0 \subseteq R^*$ （Rが反射的）

$R^* o R^* = (\bigcup_{i \in N} R^i) o (\bigcup_{k \in N} R^k)$

$= \bigcup_{i,k \in N} R^{i+k} \subseteq R^*$ （Rが推移的）

1.2(a)

- 二項関係の逆関係とは？

  ≦と≧は互いに逆関係になっている。

  Rの逆関係はR^{-1}と書く。

1.2(c)

- 二項関係≦が反対称的とは？

  任意のxとyに対して、

  x≦yかつy≦xならばx=y

1.2(c)

- 半順序とは？

  反射的かつ推移的かつ反対称的な二項関係。

- 全順序（線形順序）とは？

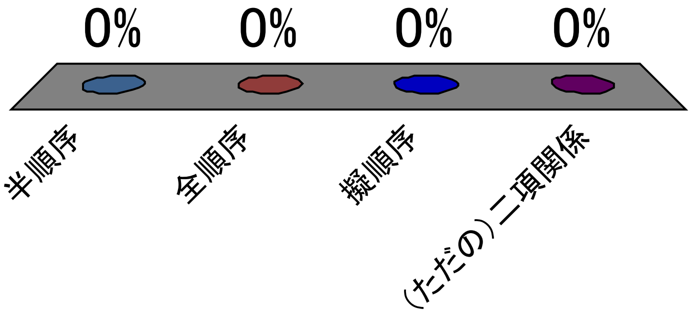
  任意のxとyに対して、x≦yまたはy≦x

- 擬順序（前順序）とは？

  反射的かつ推移的な二項関係。

整数の間の大小関係≦の特徴付けとしてもっとも適切なのは

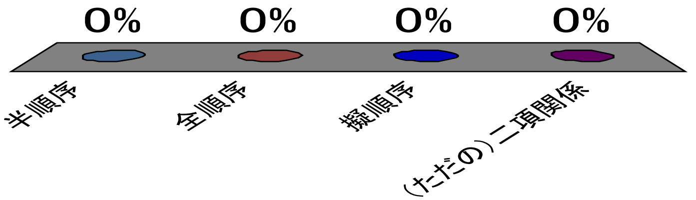
1. 半順序
2. 全順序
3. 擬順序
4. (ただの)二項関係



整数のペアの間の大小関係≦の特徴付けとしてもっとも適切なのは

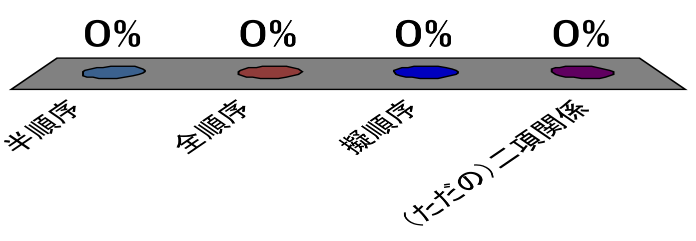
$\langle x_1, x_2 \rangle \leqq \langle y_1, y_2 \rangle$ **iff** $x_1 < y_1$ であるか、$x_1 = y_1$ かつ $x_2 \leqq y_2$

1. 半順序
2. 全順序
3. 擬順序
4. （ただの）二項関係



整数xとyに対して、xをpで割った余り≦ yをpで割った余りという関係の特徴付けとしてもっとも適切なのは

1. 半順序
2. 全順序
3. 擬順序
4. （ただの）二項関係



1.2(d)

- xとyの上限（$x \vee y$）とは？

  $x \leqq z$かつ$y \leqq z$となるzのうちで最小のもの。

  すなわち、$x \leqq z$かつ$y \leqq z$ であり、

  $x \leqq w$かつ$y \leqq w$ならば$z \leqq w$。

- xとyの下限（$x \wedge y$）とは？

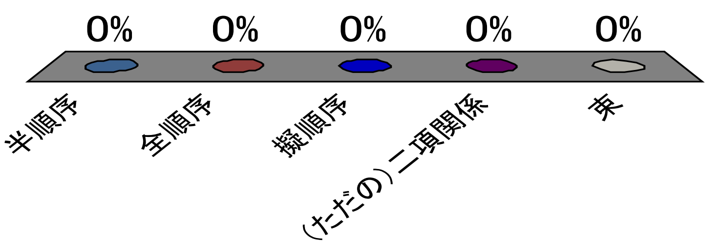
- 束とは？

  任意のxとyに対して、

  その上限と下限が存在する半順序。

ある集合の部分集合の間の包含関係⊆の特徴付けとしてもっとも適切なのは

1. 半順序
2. 全順序
3. 擬順序
4. （ただの）二項関係
5. 束



1.2(e)

- 二項関係が対称的とは？

  xとyの間に関係があれば、
  yとxの間にも関係がある。

- 同値関係とは？

  反射的かつ推移的かつ対称的な二項関係。

  $\equiv$ (mod p) もしくは $\equiv_p$

  … 整数の全体Z上の同値関係

1.2(e)

- 同値類とは？

  $[x] = \{z \in Z \mid x \equiv_p z\}$

- 集合を同値関係で割るとは？

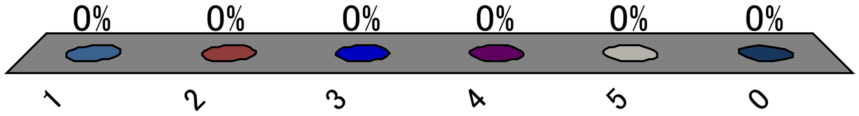
  $Z_p = Z/\equiv_p = \{[x] \mid x \in Z\}$

  割った結果は商集合という。

- 二項関係の反射推移対称閉包とは？

人間の間の関係で、ABO血液型が同じという同値関係の同値類の数は

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 0



- Rが擬順序のとき、$R \cap R^{-1}$が同値関係になることを示せ。

- この同値関係による商集合に対して、二項関係[R]を
  $$[R] = \{ \langle [x],[y] \rangle \mid \langle x,y \rangle \in R \}$$
  と定義すると、
  [R]は半順序になることを示せ。

- [R]は半順序になることを示せ。

1.2(e)

特に、[R]が反対称的であることを示す。

[x][R][y]かつ[y][R][x]と仮定。

特に、xRyかつy'Rx'かつ[x]=[x']かつ[y]=[y']

と仮定すると、

xRyかつyRy'Rx'Rxであるので、

[x]=[y]