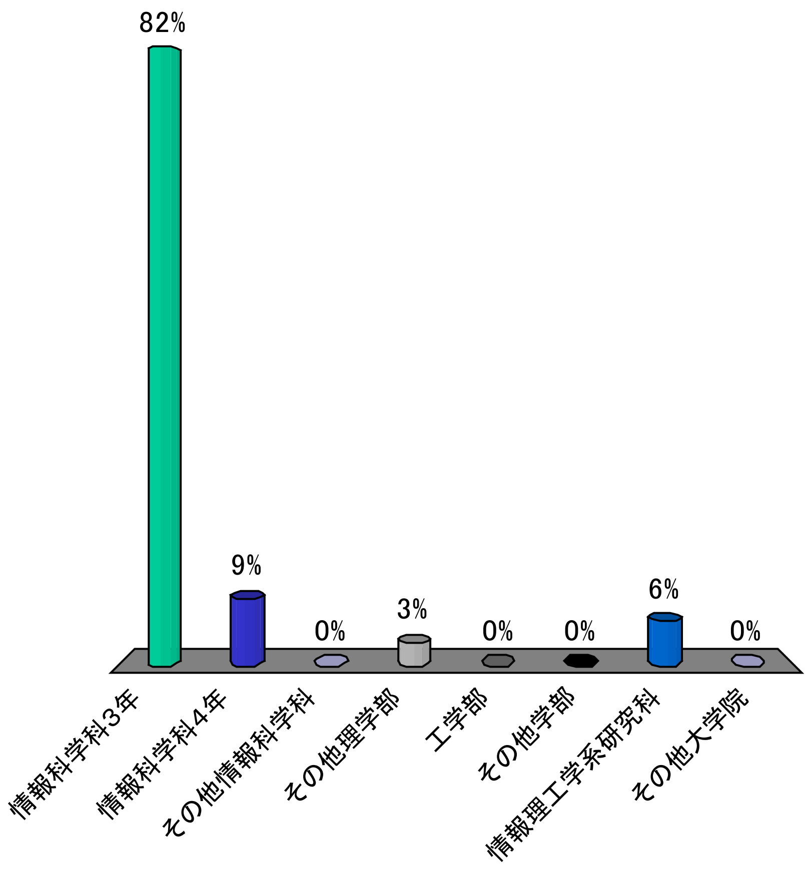
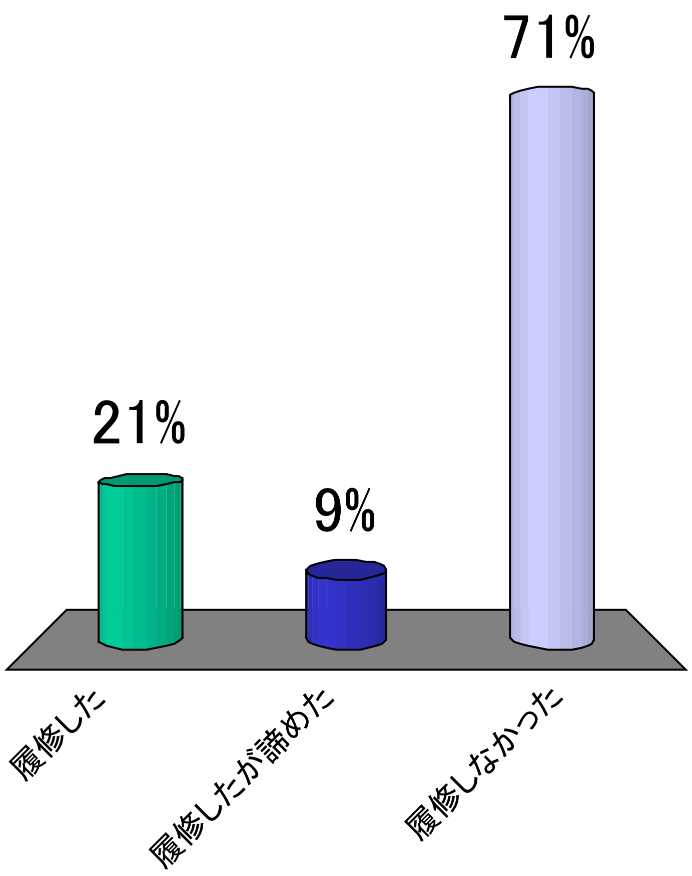
所属？

1. 情報科学科３年
2. 情報科学科４年
3. その他情報科学科
4. その他理学部
5. 工学部
6. その他学部
7. 情報理工学系研究科
8. その他大学院



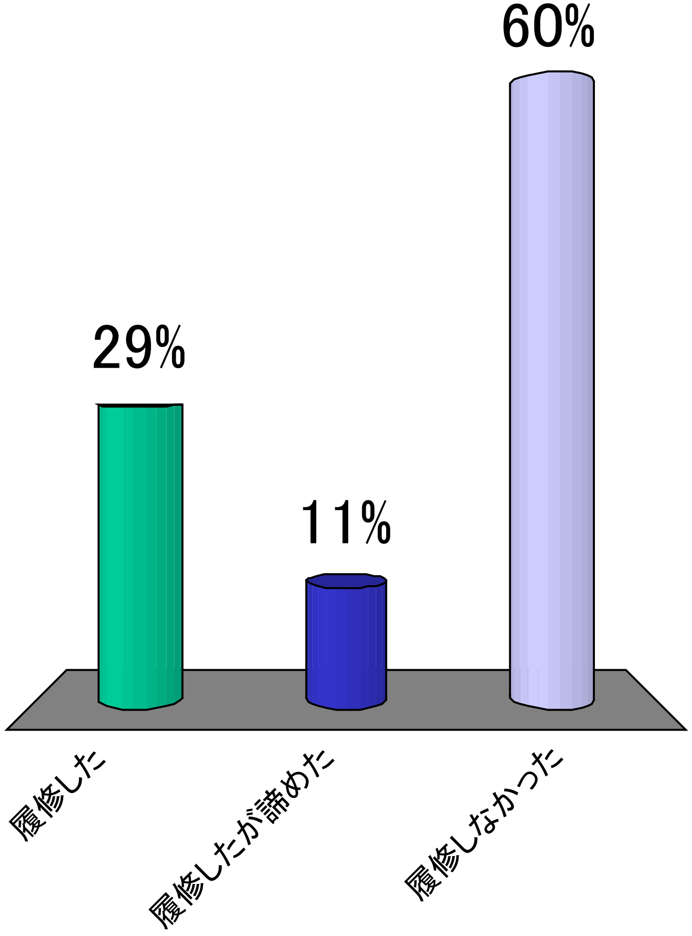
集合と位相を

1. 履修した
2. 履修したが諦めた
3. 履修しなかった



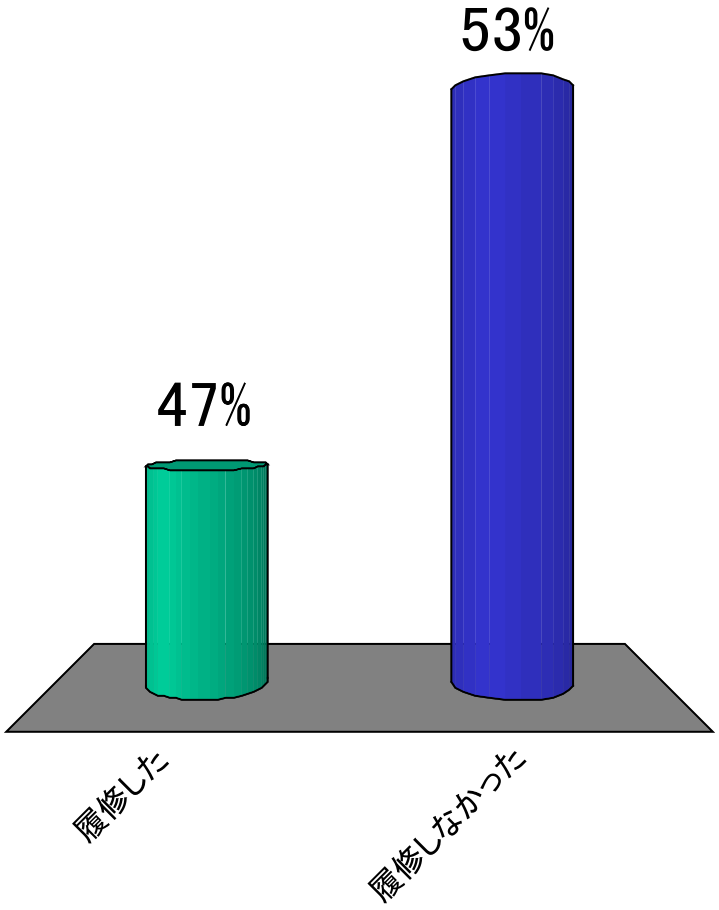
代数と幾何を

1. 履修した
2. 履修したが諦めた
3. 履修しなかった



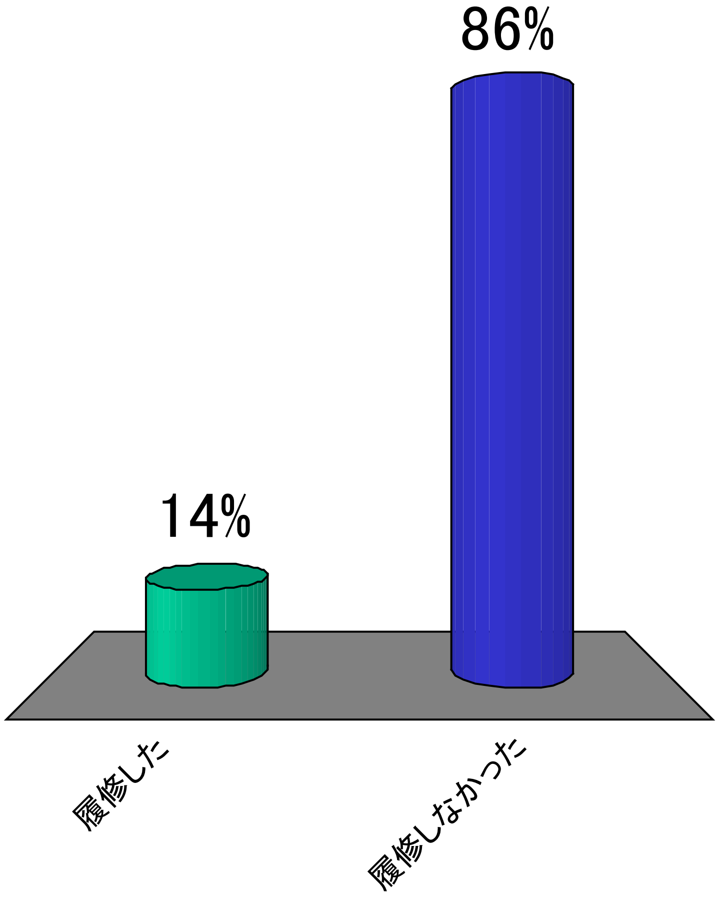
記号論理学Ｉを

1. 履修した
2. 履修しなかった



記号論理学Ⅱを

1. 履修した
2. 履修しなかった

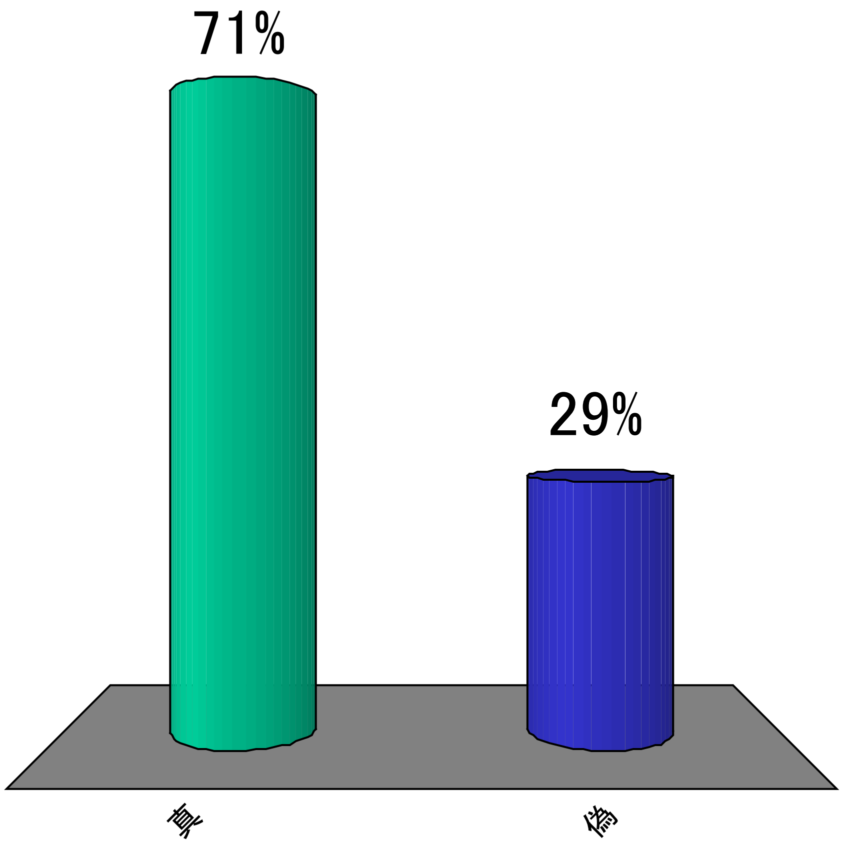


クイズ
（情報論理を始める前に）

冥王星が惑星ならば、
海王星は彗星である。

上の命題は

1. 真
2. 偽



「PならばQ」という形の命題は、
Pが偽ならば必ず真となる。
冥王星は惑星ではないので、
この命題は真である。

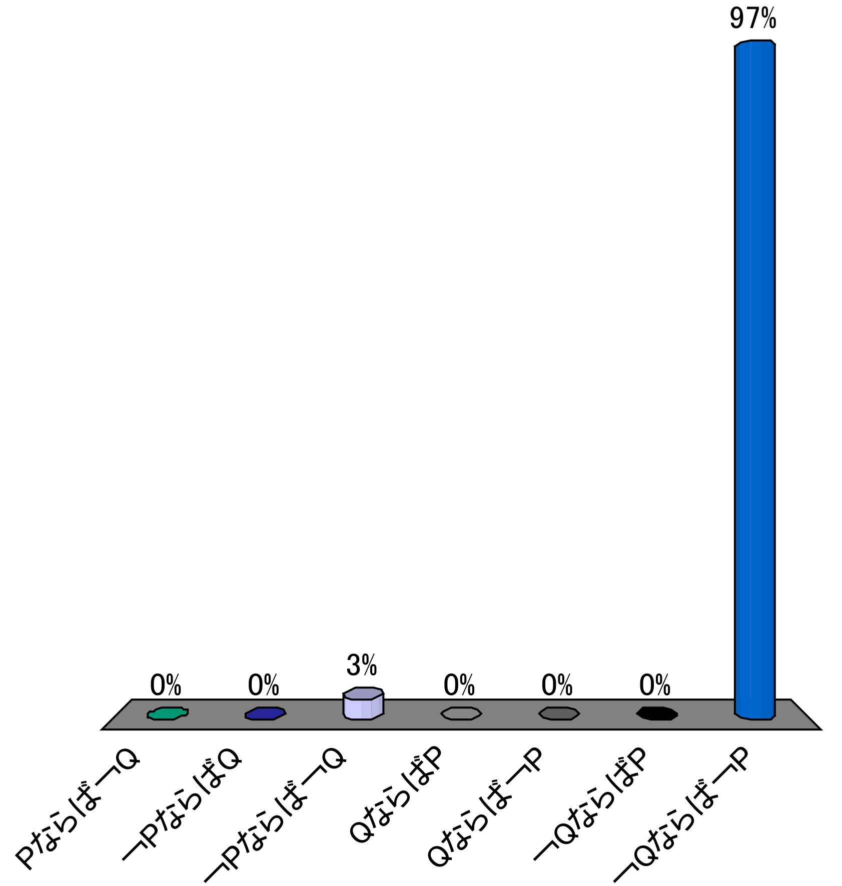
背理法とは何か？

命題Pの否定¬Pを仮定して、
矛盾が導かれるならば、
Pが成り立つ、とする推論方法。

sqrt(2)が無理数であることを示すために、
sqrt(2)=p/qと仮定して矛盾を導く。

「PならばQ」の対偶とは何か？

1. Pならば¬Q
2. ¬PならばQ
3. ¬Pならば¬Q
4. QならばP
5. Qならば¬P
6. ¬QならばP
7. ¬Qならば¬P



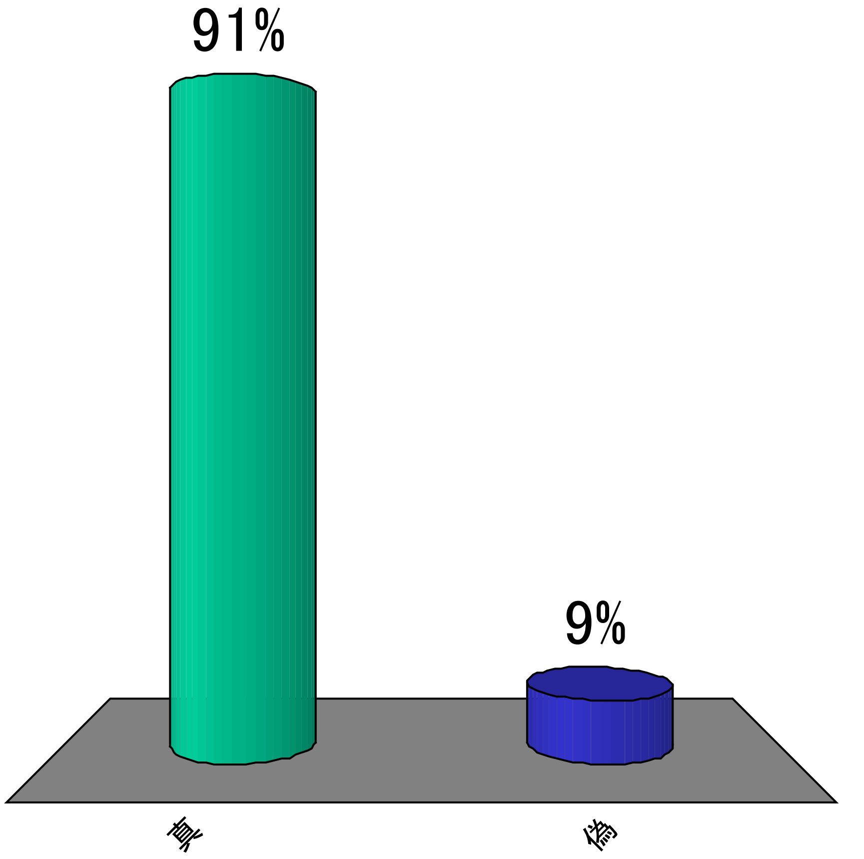
「PならばQ」の対偶は
「¬Qならば¬P」である。
対偶同士は同値。
（¬¬PとPは同値なので）
対偶の対偶はもとに戻る。

逆は「QならばP」。
裏は「¬Pならば¬Q」。
逆と裏は互いに対偶になっている。

任意の自然数xに対して、
天王星は惑星であるか、
xは3で割り切れる。

上の命題は

1. 真
2. 偽



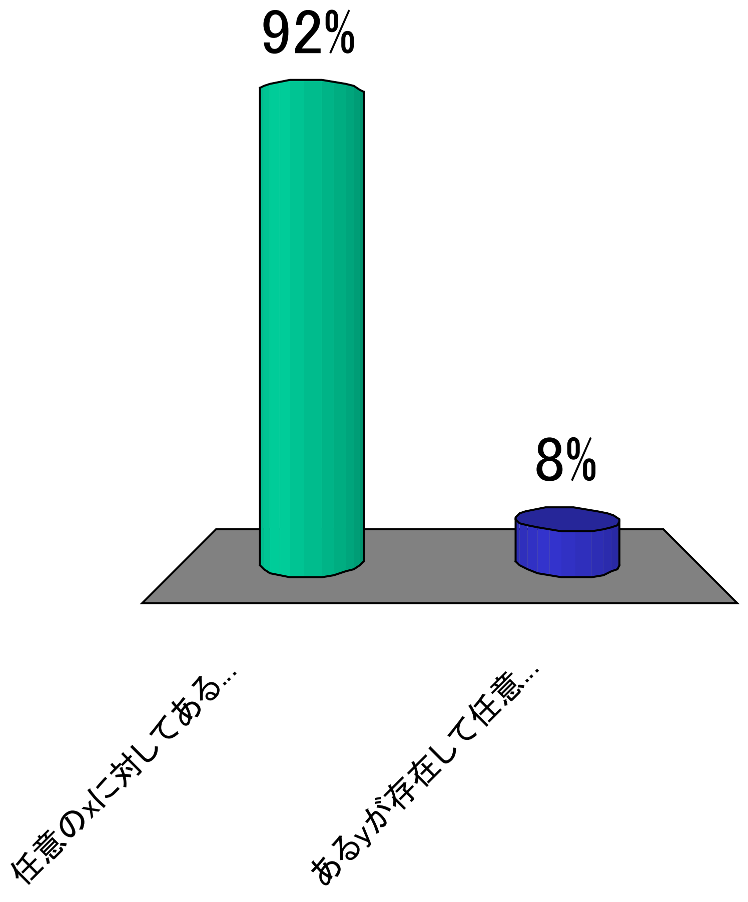
「任意のxに対して、PまたはQ(x)」
という形の命題は、
Pがxを言及していなければ、
「P、または、任意のxに対してQ(x)」と同値。
この命題は、Pが真ならば真。

Q(x)は、変数を含む命題で、
述語と呼ばれる。

Everybody loves somebody.

次のどちらの意味？

1. 任意のxに対して
   あるyが存在して
   x loves y
2. あるyが存在して
   任意のxに対して
   x loves y



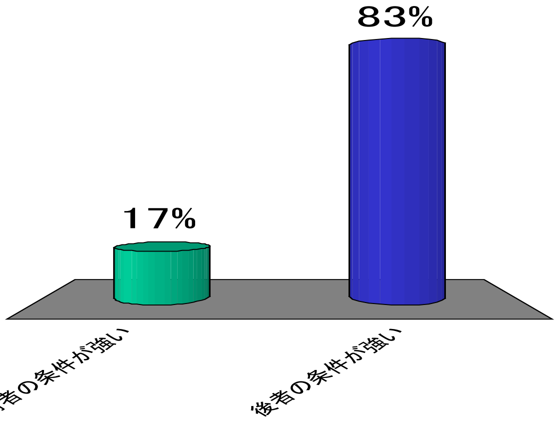
たぶん前者。

自然言語は曖昧。

任意のxに対してあるyが存在して
P(x,y)が成り立つ。

あるyが存在して任意のxに対して
P(x,y)が成り立つ。

1. 前者の条件が強い
2. 後者の条件が強い



強い方が成り立たない例をあげよ。

たとえば、述語P(x,y)を

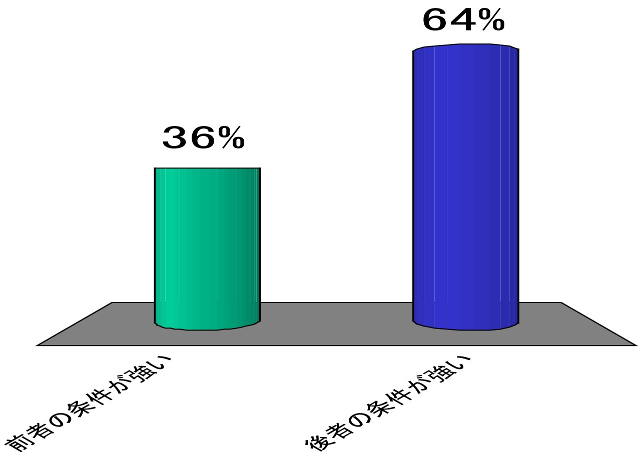
$$x < y$$

と解釈し、
変数の動く範囲を自然数の全体とすると、
前者は成り立つが後者は成り立たない。

任意のxに対してあるyが存在して
P(x,y)が成り立つ。

ある関数fが存在して任意のxに対して
P(x,f(x))が成り立つ。

1. 前者の条件が強い
2. 後者の条件が強い



強い方が成り立たない例をあげよ。

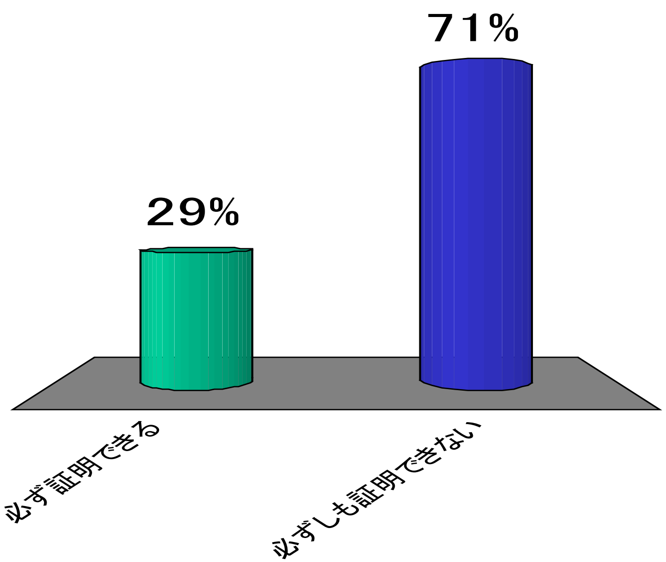
fとしてどのような関数が許されるかに
依存する。任意の関数を許すならば、
両者は同値。

許される関数が制限されていると、
後者の方が強い。

どのように解釈しても真となる命題を
恒真という。

恒真な命題は必ず証明できるか？

1. 必ず証明できる
2. 必ずしも証明できない

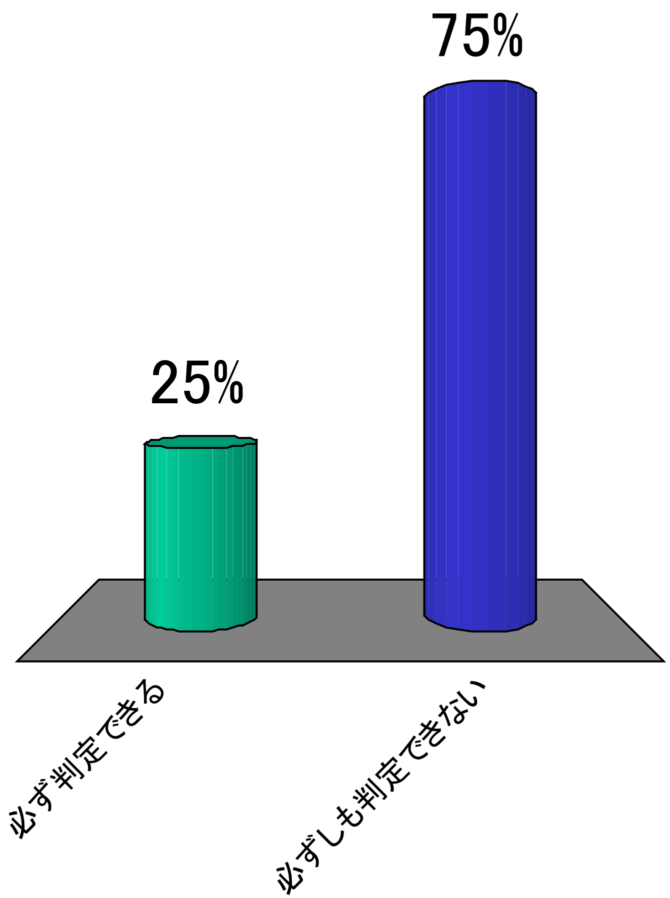


扱う命題の種類に依存する。
命題論理においては、すべての
恒真な命題(トートロジー)を証明できる
演繹体系が存在する。
一階述語論理においても、すべての
恒真な命題(恒真論理式)を証明できる
演繹体系が存在する。

二階述語論理においては、
そのような演繹体系は存在しない。

与えられた命題が恒真かどうかを判定できるか。

1. 必ず判定できる
2. 必ずしも判定できない



扱う命題の種類に依存する。
命題論理においては、
命題が恒真（トートロジー）かどうかは
判定可能である。

一階述語論理においては、
与えられた論理式が恒真かどうかを
判定するアルゴリズムは存在しない。

数学的帰納法とは？

数学的帰納法とは、

自然数xに関する述語P(x)に対して

P(0)

任意のxに対してP(x)ならばP(x+1)

から、任意のxに対してP(x)が成り立つ

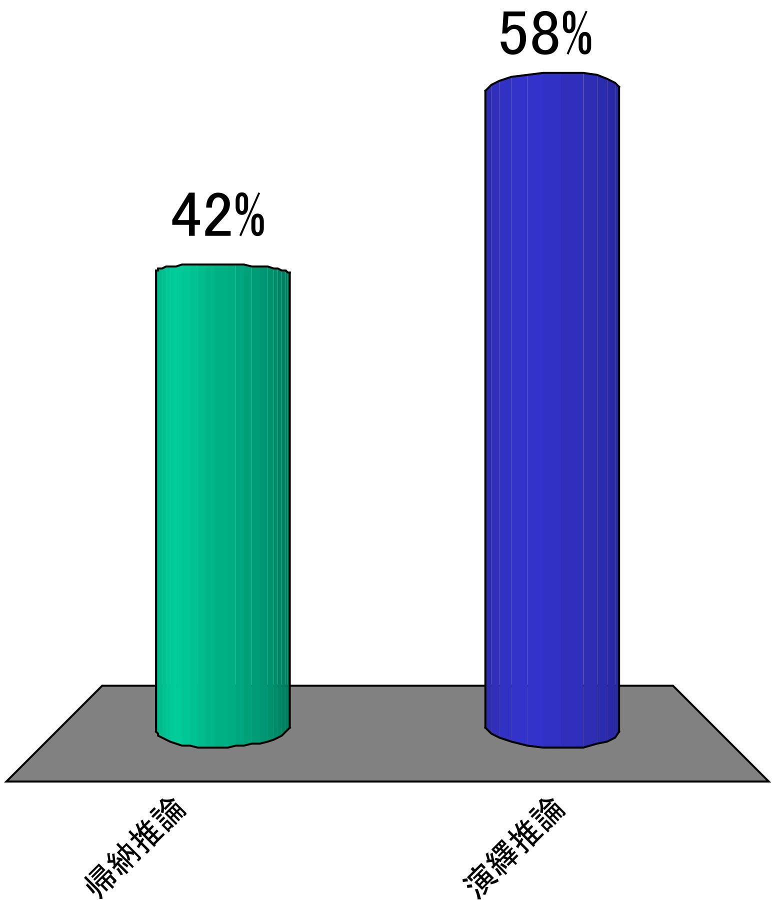
ことを導く推論方法。

ここでは、自然数は0から始まる。

0, 1, 2, 3, 4, 5, …

数学的帰納法は
帰納推論か、演繹推論か？

1. 帰納推論
2. 演繹推論



数学的帰納法は演繹推論。

数学的帰納法の帰納＝再帰

原始帰納法
帰納的定義

次のような形の再帰的関数を用いて、
xとyの最大公約数gcd(x,y)を定義せよ。

$$gcd(x,y) = g(x,x,y)$$

$$g(0,x,y) = \ldots x \ldots y \ldots$$
$$g(i+1,x,y) = \ldots i \ldots x \ldots y \ldots g(i,x,y) \ldots$$

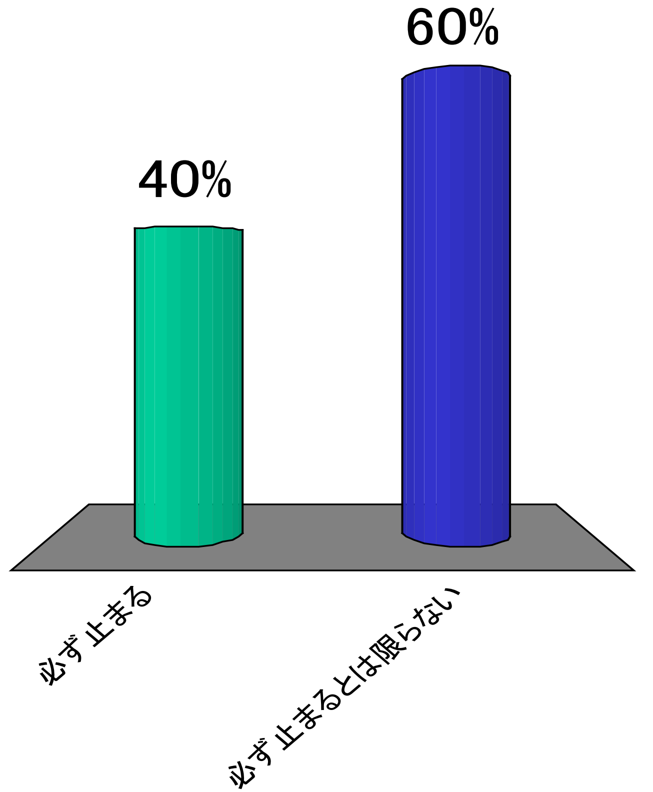
効率は悪いが次のような定義が可能。

```
gcd(x,y) = g(x,x,y)
g(0,x,y) = 1
g(i+1,x,y) = if  x mod (i+1) = 0 and
                 y mod (i+1) = 0
               then i+1
               else g(i,x,y)
```

gのような再帰的定義を原始帰納法という。

原始帰納法によって定義される関数は、
どのような入力に対しても止まるか？

1. 必ず止まる
2. 必ず止まるとは限らない



止まる。
特に、最初の引数は任意の自然数でよい。

このことは数学的帰納法によって示される。

一般に、再帰的な関数や手続きの停止性と、
数学的帰納法は関連している。

以下の命題はなぜパラドックスを生じるのか。

この命題は間違っている。

自分自身について言及（自己言及）
しているため。

嘘つきのパラドックス

「クレタ人は嘘つきである」と

クレタ人が言った。

集合Xとその冪集合2^Xは、
一対一に対応しないことを示せ。

Xの冪集合2^Xとは、
Xのすべての部分集合からなる集合。

Xと2^Xが関数 $f: X \to 2^X$ によって
一対一に対応すると仮定して、
Xの部分集合Zを以下のように定義する。

$Z = \{ x \mid x \in f(x)$ でない $\}$

そして、$f(z)=Z$となるzを取る。
以下の条件は、成り立つとしても
成り立たないとしても、矛盾が導かれる。

$z \in f(z)=Z$

（対角線論法）

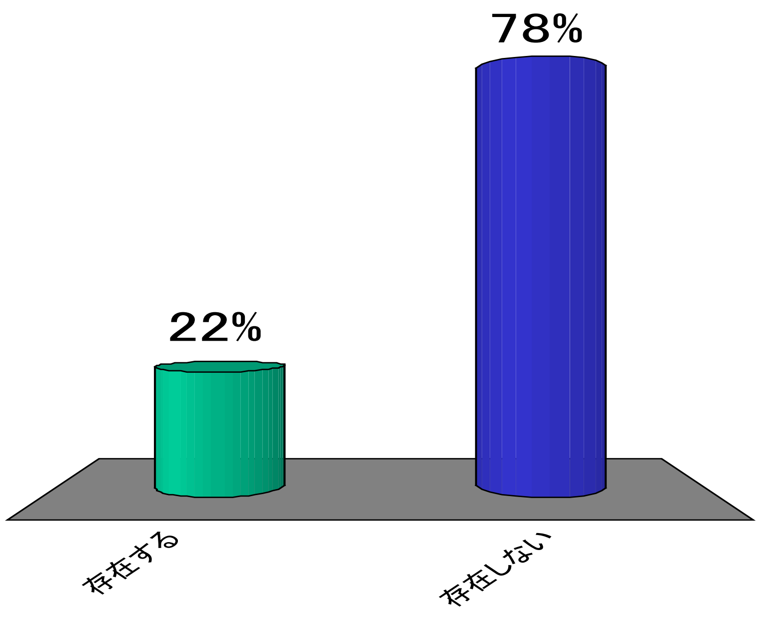
自然数の対(x,y)に自然数を対応させる関数を与えよ。異なる対は異なる自然数に対応させる。

いろいろあり得る。
たとえば、(x,y)に2^x3^yを対応させればよい。

このようにして、自然数の有限列、
自然数を葉とする木構造、
さらにプログラムなども、
一つの自然数に対応させることができる。
さまざまなデータ構造に対応する自然数を
そのデータ構造の「符号」という。

プログラムpが入力xに対して
停止するかどうかを
（プログラムを実行せずに）
判定できるプログラムは存在するか？

1. 存在する
2. 存在しない



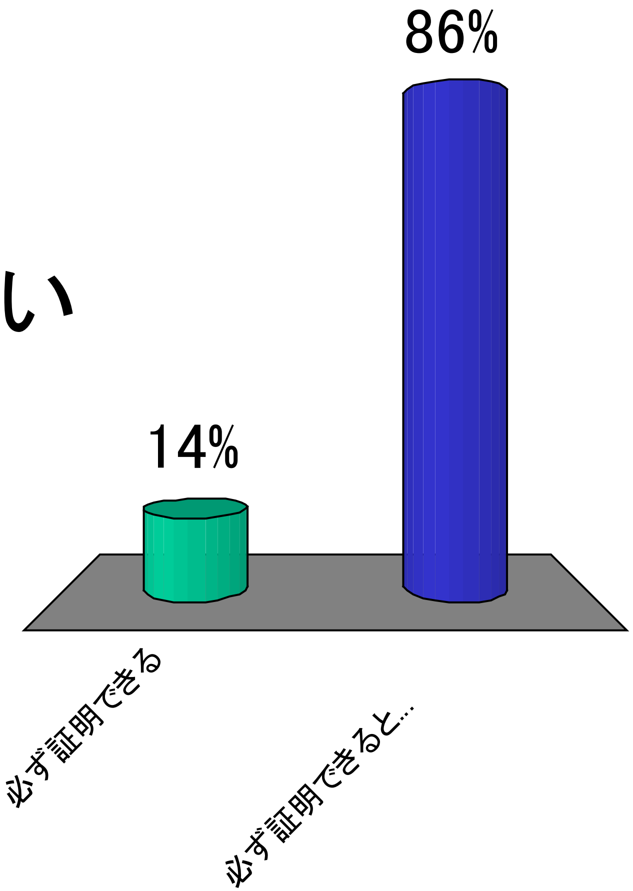
そのようなプログラムh(p,x)があったとして、
プログラムpを入力とする次のような
プログラムqを考える。

　h(p,p)を実行し、停止すると判断したら、
　無限ループに入る（停止しない）。
　停止しないと判断したら、停止する。

このプログラムqをq自身に対して実行する。
すると、停止するとしても、しないとしても、
矛盾が生じる。（対角線論法）

自然数に関する正しい命題は、
必ず証明できるか。

1. 必ず証明できる
2. 必ず証明できるとは限らない



どのような演繹体系を用いても、
正しいが証明できない命題が存在する。

任意の正しい命題が証明できるとすると、
プログラムの停止性が判定できてしまう。

符号化を用いて、自分自身が証明できない
ことを表す命題を構築できる。この命題は、
正しいが証明できない（ゲーデル）。