

1. チューリング機械の遷移テーブルとは何か。
2. チューリング機械に対する以下の拡張のうち、チューリング機械の計算能力を真に高めるのはどれか。二つ選べ。

1. ヘッドが一度に複数ステップ移動できるチューリング機械
2. ヘッドが複数あるチューリング機械
3. テープが複数あるチューリング機械
4. あらかじめテープに無限個の文字が書かれているチューリング機械
5. 非決定的に動作するチューリング機械
6. エラーが起きたときに特別な状態に遷移するチューリング機械
7. 停止しない場合に特別な状態に遷移するチューリング機械
8. 昇目が二次元的に広がりヘッドが上下左右に移動するチューリング機械

3. 以下では、 $+$, \times , \div は原始帰納的関数として用いてよい。さらに、

$$p(x, y) = \frac{(x + y) \times (x + y + 1)}{2} + y$$

および $p_1(p(x, y)) = x$ と $p_2(p(x, y)) = y$ を満たす関数 $p_1(z)$ と $p_2(z)$ も、原始帰納的関数として用いてよい。以下の問に答えよ。

1. $x = 0$ ならば y 、 $x > 0$ ならば z を返す関数 $if(x, y, z)$ を、原始帰納的関数として定義せよ。
2. $f(x, y)$ を原始帰納的とする。 $k(z, x)$ を、任意の $y < z$ に対して $f(x, y) > 0$ ならば 0、そうでなければ 1 を返す関数とする。 $k(z, x)$ を $f(x, y)$ を用いて原始帰納法によって定義せよ。
3. $h_1(x)$ と $h_2(x)$ が部分帰納的ならば、 $h_2(h_1(x))$ も部分帰納的であることを示せ。すなわち、 $h_1(x) = g_1(\mu y. f_1(x, y) = 0)$ 、 $h_2(x) = g_2(\mu y. f_2(x, y) = 0)$ として、 $h_2(h_1(x)) = g(\mu y. f(x, y) = 0)$ となる原始帰納的関数 $f(x, y)$ と $g(y)$ を与えよ。
4. チューリング機械の遷移テーブルの符号 e と自然数 y が与えられたとき、 y が e の実行過程の符号かどうかを判定するには、どうすればよいか。
5. ここでは、自然数の集合 X が帰納的に可算であるとは、原始帰納的関数 $f(x, y)$ が存在して、

$$X = \{x \mid \text{ある自然数 } y \text{ が存在して } f(x, y) = 0\}$$

と書けることと定義する。 X が帰納的に可算ならば、 $\{u \mid \text{ある自然数 } v \text{ が存在して } p(u, v) \in X\}$ と書ける集合も帰納的に可算になることを証明せよ。

(裏もあり)

6. 論理式 A の符号 e と自然数 y が与えられたとき、 y が A の証明の符号であるかどうかを判定するには、どうすればよいか。

7. $T(e, x, y)$ を Kleene の述語とし、 $T[e, x, y, z]$ を T を表現する論理式とする。

$$K = \{ x \mid \exists y.T[\bar{x}, \bar{x}, y, 0] \text{ は算術の定理} \}$$

であることを説明せよ。ただし、 \bar{x} は自然数 x を表す項である。

8. 以下の文章の (1) から (4) に入るべきものを次の中から選べ。

真 偽 $\vdash A$ $\models A$ $\Gamma \vdash A$ $\Gamma \models A$

Γ を算術の公理の全体とする。いま、論理式 A は、標準的な解釈では (1) だが、(2) ではないとする。一階述語論理の強い完全性より、(3) ならば (2)。したがって、(3) でない。ということは、 Γ を充足しているにも関わらず、 A を (4) にする解釈が存在することになる。

9. Presburger 算術とは何か。

10. 以下のそれぞれの問題について、問題の具体例を自然数に符号化して考える。たとえば、数独パズルの場合は、具体的な数独パズルを自然数に符号化する。このとき、条件を満たす具体例の符号の全体は、帰納的か。(すなわち、問題は決定可能か。) 帰納的に可算か。それとも、帰納的に可算でないか。たとえば、数独パズルの場合は、解ける数独パズルの符号の全体は、帰納的か、帰納的に可算か、帰納的に可算でないか。

1. 数独パズルが解けるか？
2. 連立高次方程式が整数解を持つか？
3. グラフがハミルトン回路を持つか？
4. 二つの有限オートマトンが認識する言語が同じか？
5. 二つの文脈自由文法が生成する言語が同じか？
6. 算術の論理式が公理か？
7. 算術の論理式が定理か？
8. 算術の論理式が標準的な解釈のもとで真か？
9. Presburger 算術の論理式が標準的な解釈のもとで真か？
10. 一階述語論理の論理式が恒真か？