情報論理 2009 年 期末試験 7 月 23 日

1. 以下は、一階述語論理における Hilbert 流の証明である。ただし、トートロジー (の各々の命題記号を定まった論理式で置き換えて得られるような論理式) は公理とする。

(1) $(\forall x.\ P(x) \lor Q) \supset P(y) \lor Q$
(2) $((\forall x.\ P(x) \lor Q) \supset P(y) \lor Q) \supset ((\forall x.\ P(x) \lor Q) \land \neg Q \supset P(y))$
(3) $(\forall x.\ P(x) \lor Q) \land \neg Q \supset P(y)$
(4) $\forall y.\ (\forall x.\ P(x) \lor Q) \land \neg Q \supset P(y)$
(5) $(\forall y.\ (\forall x.\ P(x) \lor Q) \land \neg Q \supset P(y)) \supset ((\forall x.\ P(x) \lor Q) \land \neg Q \supset (\forall y.\ P(y)))$
(6) $(\forall x.\ P(x) \lor Q) \land \neg Q \supset (\forall y.\ P(y))$
(7) $(\forall x.\ P(x) \lor Q) \land \neg Q \supset (\forall y.\ P(y)) \supset (\forall x.\ P(x) \lor Q) \supset (\forall y.\ P(y)) \lor Q$
(8) $(\forall x.\ P(x) \lor Q) \supset (\forall y.\ P(y)) \lor Q$

1. トートロジー (の各々の命題記号を定まった論理式で置き換えて得られるような論理式) はどれか。
2. 1 以外の公理はどれか。
3. 汎化によって得られらる論理式はどれか。
4. 三段論法によって得られらる論理式はどれか。

2. 変数は自然数 (0 以上の整数) を表すとする。$f(n) = (n \times (n+1))/2$ とおき、$p(x, y) = f(x+y) + y$ とおく。z に対して、$p(x, y) = z$ となる x を返す関数 $p_1(z)$ を、原始帰納的関数として定義したい。そのために、z に対して $f(n) \leq z < f(n+1)$ を満たす n を $g(z)$ とおく。また、$x \geq y$ ならば $x \dot{-} y = x - y$、$x < y$ ならば $x \dot{-} y = 0$ とする。

1. $p_1(z)$ を f と g と $\dot{-}$ を用いて表せ。
2. $g(z) = h(z+1, z)$ と置き、h を原始帰納法によって以下のように定義したい。

$$\begin{aligned} h(0, z) &= 0 \\ h(S(x), z) &= \cdots \end{aligned}$$

$\cdots$ として適切な式は何か。$+$, $\times$, $\dot{-}$, f は原始帰納的関数として用いてよい。
(ヒント: $(1 \dot{-} (1 \dot{-} x)) \times y + (1 \dot{-} x) \times z$ は、$x > 0$ ならば y に、$x = 0$ ならば z に等しい。)

3. ここでは、自然数の集合 X が帰納的に可算であるとは、原始帰納的関数 $f(x, y)$ が存在して、

$$X = \{x \mid \text{ある自然数 } y \text{ が存在して } f(x, y) = 0\}$$

と書けることと定義する。X が帰納的に可算ならば、$\{u \mid \text{ある自然数 } v \text{ が存在して } p(u, v) \in X\}$ と書ける集合も帰納的に可算になることを証明せよ。

4. $T(e, x, y)$ を Kleene の述語とする。$K = \{x \mid \text{ある自然数 } y \text{ が存在して } T(x, x, y) = 0\}$ とおく。

1. Kleene の述語とは何か。
2. K が帰納的でないことを説明せよ。

5. 関数 $f(x)$ を論理式 $A[x, y]$ が表現し、関数 $g(y)$ を論理式 $B[y, z]$ が表現しているとき、$h(x) = g(f(x))$ と定義される関数を表現する論理式を与えよ。

6. Γ を一階の算術の公理の集合とする。(公理は閉じた論理式とする。) Γ の論理式を公理として証明できる閉じた論理式の全体を $\mathit{Thoerem}(\Gamma)$ と書く。また、Γ を充足する任意の解釈のもとで真になる閉じた論理式の全体を $\mathit{Valid}(\Gamma)$ と書く。さらに、算術の標準的な解釈 I のもとで真になる閉じた論理式の全体を $\mathit{True}(I)$ と書く。

1. $\mathit{Thoerem}(\Gamma)$ と $\mathit{Valid}(\Gamma)$ と $\mathit{True}(I)$ の関係はどうなっているか。
2. Γ を充足するが、Gödel 文 G を偽にする解釈が存在することを説明せよ。