情報論理 2009 年 中間試験 6 月 8 日

1. A と B と C は任意の集合とする。以下の集合の間で、一対一の対応が常に存在する組を作れ。

$$A^{\{0,1\}} \quad \{0,1\}^A \quad A^{B\times C} \quad A+A \quad A^C\times B^C \quad \{0,1\}\times A \quad 2^A$$
$$A\times A \quad (A^B)^C \quad (A\times B)^C$$

2. 集合 A を、$A = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$ と定義する。また、関係 R を、$R = \{\langle a,b\rangle,\langle b,d\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,g\rangle,\langle c,h\rangle,\langle i,j\rangle\}$ と定義する。E は R の反射推移対称閉包とする。商集合 A/E を求めよ。

3. 次の論理式は (1) 恒真か、(2) 充足不能か、(3) どちらでもないか。(3) の場合は、真にする解釈と偽にする解釈を与えよ。

1. $(\forall x.\ P(x) \supset Q(x)) \wedge (\exists x.\ P(x) \wedge \neg Q(x))$
2. $(\exists x.\ P(x)) \wedge Q \supset (\exists x.\ P(x) \wedge Q)$
3. $(\forall x.\ P(x) \vee Q(x)) \supset (\forall x.\ P(x)) \vee (\forall x.\ Q(x))$
4. $\forall x.\ R(x, f(x)) \wedge \neg R(x, f(f(x)))$

4. 以下の形の閉じた論理式を考える。

$$\forall x.\ \forall y.\ \exists z.\ A[x,z] \vee B[y,z]$$

ただし、$A[x,z]$ は y を自由に含まない。$B[y,z]$ は x を自由に含まない。アリティが 1 の新しい関数記号を 2 個導入して、上の論理式と充足可能性が等しい論理式を作れ。

5. Γ を極大無矛盾集合とする。$A \supset B \in \Gamma$ ならば、$A \notin \Gamma$ または $B \in \Gamma$ であることを証明せよ。

6. $A[x,u,v,w]$ を以下の論理式とする。

$$\begin{aligned}&(Q(u,v) \wedge Q(v,w) \supset Q(u,w)) \wedge\\ &Q(c,c) \wedge\\ &(\neg Q(f(x),x) \wedge Q(x,f(x))) \wedge\\ &Q(f(f(f(c))),c)\end{aligned}$$

$A[x_1,u_1,v_1,w_1] \wedge A[x_2,u_2,v_2,w_2] \wedge A[x_3,u_3,v_3,w_3]$ が矛盾するように、変数 $x_1,...,w_3$ を具体化せよ。