情報論理期末試験 2008 年 7 月 28 日

1. 次の論理式は、(1) 恒真、(2) 充足不能、(3) 恒真でないが充足可能、のいずれか答えよ。(3) の場合は、論理式を**偽**にする解釈 (構造) を与えよ。

1. $(\forall x.\ P \supset Q(x)) \supset (P \supset (\forall x.\ Q(x)))$
2. $(P \supset (\forall x.\ Q(x))) \supset (\forall x.\ P \supset Q(x))$
3. $(\forall x.\ P(x) \supset Q(x)) \supset ((\forall x.\ P(x)) \supset (\forall x.\ Q(x)))$
4. $((\forall x.\ P(x)) \supset (\forall x.\ Q(x))) \supset (\forall x.\ P(x) \supset Q(x))$
5. $(\forall x.\ P(x) \supset Q(x)) \wedge (\exists x.\ P(x) \wedge \neg Q(x))$
6. $(\exists x.\ P(x) \supset Q(x)) \wedge (\exists x.\ P(x) \wedge \neg Q(x))$
7. $(\forall x.\exists y.\ R(x,y)) \supset (\exists y.\forall x.\ R(x,y))$
8. $(\exists y.\forall x.\ R(x,y)) \supset (\forall x.\exists y.\ R(x,y))$

2. 自然数 x と y に対して、x が y^n によって割り切れるような最大の n を求める関数 $f(x,y)$ が原始帰納的であることを示せ。$x > 0$ と $y > 1$ の場合に正しい答えが返ればよいとする。また、x の y 乗を計算する関数 $expt(x,y)$、x と y の最大公約数を計算する関数 $gcd(x,y)$、足し算 $+$、掛け算 $\times$、引き算 $monus$ は、原始帰納的関数として既に定義されているとしてよい。$monus(x,y)$ は、$x \geq y$ ならば $x - y$ を返し、$x < y$ ならば 0 を返す関数である。なお、射影や合成などを明示する必要はない。ヒント: $f(x,y) = g(x,y,x)$ とおいて、

$$g(x,y,S(z)) \ = \ \textbf{if}\ x\ \text{が}\ expt(y,S(z))\ \text{で割り切れる}\ \textbf{then}\ S(z)\ \textbf{else}\ g(x,y,z)$$

というように $g(x,y,z)$ を定義すればよい。

3. 自然数の集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ が帰納的に可算であることと、原始帰納的関数 $f_X(x,y)$ が存在して、$X = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{ある}\ y \in \mathbb{N}\ \text{が存在して}\ f_X(x,y) = 0\}$ と書けることは同値である。自然数の集合 X と Y が帰納的に可算ならば、$X \cap Y$ も帰納的に可算であることを証明せよ。(前問ができていなくとも) 前問の結果を用いてよい。

4. 一階の算術の定理の符号の全体が帰納的に可算になることを説明せよ。

5. 原始帰納的関数の定義に適当な順番を付けるとする。(定義に番号を付けるので同じ関数に複数の番号が付くこともある。) $eval(p, x)$ を、番号 p の原始帰納的関数に入力 x を与えた結果を返す関数とする。(p が一引数の関数の定義でないときは、たとえば 0 を返すと約束する。) 以下、関数 $eval(p, x)$ は帰納的であると仮定する。さらに、関数 $h(x)$ を

$$h(x) \;=\; eval(x, x) + 1$$

と定義する。

1. 関数 $h(x)$ は帰納的であることを説明せよ。
2. 関数 $h(x)$ は原始帰納的でないことを示せ。

6. 以下の語句を数行で説明せよ。

1. (チューリング機械の) インデックス (もしくは符号)
2. Kleene の述語
3. 最小化
4. 帰納的集合
5. 表現可能性
6. 算術の不完全性