情報論理中間試験 2008 年 6 月 16 日

1. 次の論理式は、(1) 恒真、(2) 充足不能、(3) 恒真でないが充足可能、
のいずれか答えよ。(3) の場合は、論理式を真にする解釈 (構造) を与えよ。

1. $(\forall x.\ P \vee Q(x)) \supset P \vee (\forall x.\ Q(x))$
2. $(\forall x.\ P \wedge Q(x)) \supset P \wedge (\forall x.\ Q(x))$
3. $(\forall x.\ P(x) \vee Q(x)) \supset (\forall x.\ P(x)) \vee (\forall x.\ Q(x))$
4. $(\forall x.\ P(x) \wedge Q(x)) \supset (\forall x.\ P(x)) \wedge (\forall x.\ Q(x))$
5. $(\forall x.\exists y.\ R(x,y)) \wedge \neg(\exists x.\forall y.\ R(x,y))$
6. $\neg(\forall x.\exists y.\ R(x,y)) \wedge (\exists x.\forall y.\ R(x,y))$
7. $(\forall x.\ \neg R(x,x)) \wedge (\forall x.\forall y.\forall z.\ R(x,y) \wedge R(y,z) \supset R(x,z)) \wedge$
   $(\forall x.\forall y.\ R(x,y) \supset R(y,x)) \wedge (\exists x.\exists y.\ R(x,y))$
8. $(\forall x.\ R(x,x)) \wedge (\forall x.\forall y.\forall z.\ R(x,y) \wedge R(y,z) \supset R(x,z)) \wedge$
   $(\forall x.\forall y.\ R(x,y) \supset R(y,x)) \wedge (\exists x.\exists y.\ \neg R(x,y))$

2. 次の論理式を $A[x_1, x_2]$ とおく。

$$R(c, f(x_1)) \wedge \neg R(f(x_1), c) \wedge$$
$$(R(x_1, x_2) \supset R(f(x_1), f(x_2))) \wedge (R(f(x_1), f(x_2)) \supset R(x_1, x_2))$$

1. この論理式に対する Herbrand 領域 $\mathbf{H}$ を定義せよ。
2. 論理式の集合 Γ を $\Gamma = \{A[t_1, t_2] \mid t_1, t_2 \in \mathbf{H}\}$ とおく。閉じた原子論理式を命題記号とみなしたとき、Γ を充足する解釈を一つ定義せよ。
3. 前問の解釈に対応する Herbrand 解釈を定義せよ。
4. 前問の Herbrand 解釈が論理式 $\forall x_1.\forall x_2.A[x_1, x_2]$ を充足することを説明せよ。

3. f を論理式 $A[x, y]$ に現れない関数記号とする。

1. $\forall x.\exists y.A[x, y]$ と $\forall x.A[x, f(x)]$ が論理的に同値でない例を示せ。(具体的な $A[x, y]$ と解釈を与えよ。)
2. $\forall x.\exists y.A[x, y]$ が充足可能ならば $\forall x.A[x, f(x)]$ も充足可能であることを説明せよ。
3. $\forall x.A[x, f(x)]$ が充足可能ならば $\forall x.\exists y.A[x, y]$ も充足可能であることを説明せよ。

4. 次の概念について簡単に (数行で) 説明せよ。

1. 同値関係で割る
2. 論理式の構造に関する帰納法
3. α 同値
4. コンパクト性
5. ヒルベルト流
6. 健全性
7. 完全性
8. 強い完全性