情報論理期末試験 2007 年 7 月 23 日

1. 自然数 x に対して、$y \times y \leq x$ を満たす最大の自然数 y を返す関数 $f(x)$ を原始帰納的関数として定義するために $f(x) = g(x, x)$ とおく。関数 $g(x, y)$ を以下のように原始帰納法によって定義せよ。

- $g(x, 0) = 0$
- $g(x, S(y)) = \cdots$

足し算 $+$、掛け算 $\times$、引き算 $monus$ は、原始帰納的関数として既に定義されているとしてよい。$monus(x, y)$ は、$x \geq y$ ならば $x - y$ を返し、$x < y$ ならば 0 を返す関数である。なお、射影や合成などを明示する必要はない。

2. インデックス x のチューリング機械が入力 x に対して停止するかどうかを判定するチューリング M が存在したとして矛盾を導け。すなわち、M は入力 x に対して常に停止し、インデックス x のチューリング機械が入力 x に対して停止するならば 0 を返し、停止しないならば 1 を返す。

3. 自然数の集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ が帰納的に可算であることと、原始帰納的関数 $f(x, y)$ が存在して、$X = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{ある } y \in \mathbb{N} \text{ が存在して } f(x, y) = 0\}$ と書けることは同値である。自然数の集合 X と Y が帰納的に可算ならば、$X \cup Y$ も帰納的に可算であることを証明せよ。

4. 以下の (1)〜(5) に入る語句や式を答えよ。ゲーデルの不完全性定理の議論において、閉じた論理式 G に対して、

$$G \leftrightarrow \neg \exists y Proof[\overline{\ulcorner G \urcorner}, y, 0]$$

という同値命題が証明可能である。以下、算術の演繹体系が (1) であると仮定する。さらに、G が証明可能であると仮定する。すると、G の証明が存在する。その証明の符号である自然数を y_0 とおく。すると、$proof((2), (3)) = 0$ が成り立つ。論理式 $Proof[x, y, z]$ は関数 $proof$ を (4) しているので、$Proof[\overline{(2)}, \overline{(3)}, 0]$ が証明可能である。すると、(5) が証明可能である。ところが、上の同値命題が証明可能なので、G が証明可能ならば $\neg$(5) も証明可能。したがって、(5) $\wedge \neg$(5) が証明可能となり、算術の演繹体系が (1) であるという仮定に反してしまう。

5. 以下の語句を数行で説明せよ。

1. 一階の算術
2. 数学的帰納法
3. 部分帰納的関数
4. 帰納的集合