情報論理試験 2006 年 9 月 25 日

1 の各問は 5 点。**4**(3) および **6**(2) は 20 点。それ以外は 10 点として採点。合計 200 点。

以下の問題において、特に断らない限り論理式とは一階述語論理の論理式を意味する。また、x, y 等は変数、c, d 等は定数記号、f, g 等は関数記号、P, Q 等は命題記号または述語記号を表す。

1. 以下の各論理式について、「恒真」「恒真でないが充足可能」「充足不能」のいずれかであるか判定せよ。(理由は書かなくてよい。)
(1) $((P \supset Q) \supset Q) \supset P$ — 「恒真でないが充足可能」
(2) $((P \supset Q) \supset P) \supset P$ — 「恒真」
(3) $(\forall x.\ P(x) \vee Q) \supset ((\forall x.\ P(x)) \vee (\forall x.\ Q))$ — 「恒真」
(4) $(\forall x.\ P(x) \vee Q(x)) \supset ((\forall x.\ P(x)) \vee (\forall x.\ Q(x)))$ — 「恒真でないが充足可能」
(5) $(\forall x.\ Q(x, f(x))) \wedge (\exists y.\ \forall x.\ \neg Q(x, y))$ — 「恒真でないが充足可能」
(6) $(\forall x.\ Q(x, f(x))) \wedge (\exists x.\ \forall y.\ \neg Q(x, y))$ — 「充足不能」

2. 次の問に答えよ。
(1) A は x を自由に含まない論理式とする。論理式 $A \supset B[x]$ が恒真ならば、論理式 $A \supset (\forall x.\ B[x])$ も恒真であることを説明せよ。
(2) 論理式 $A[x]$ が x を自由に含むとき、論理式 $A[x] \supset B[x]$ が恒真であっても、論理式 $A[x] \supset (\forall x.\ B[x])$ は恒真であるとは限らない。反例を与えよ。

> この問では、例えば $A[x] \equiv x < 3$、$B[x] \equiv x < 4$ とするように、$A[x] \supset B[x]$ が恒真でない反例を与える答が多かった。この場合は 5 点とした。

3. この問題では述語記号のみを考え、関数記号および定数記号はないものとする。領域を D とする解釈 I と領域を D' とする解釈 I' に対して、関係 $R \subseteq D \times D'$ が以下の条件を満たすとする: 任意の述語記号 P に対して、

$$u_i R u'_i\ (1 \leq i \leq n) \quad \Longrightarrow \quad I(P)(u_1, \cdots, u_n) = I'(P)(u'_1, \cdots, u'_n)$$

このとき、次のことを示したい。

> 任意の論理式 A に対して、I に対する割り当て J と I' に対する割り当て J' が、任意の変数 x に対して $J(x) R J'(x)$ を満たすとき、$[\![A]\!]_{I,J} = [\![A]\!]_{I',J'}$ が成り立つ。(*)

次の問に答えよ。
(1) R に対する条件が足りない。何か。(ヒント: $\exists x.A[x]$ という形の論理式の真偽が I と I' で同じになるためには、R はどのような条件を満たせばよいか。)

任意の $u \in D$ に対してある $u' \in D'$ が存在して uRu'。任意の $u' \in D'$ に対してある $u \in D$ が存在して uRu'。もちろん、これよりも強い条件 (例えば $R = D \times D'$) でもよいし、I や I' によっては弱い条件でもよいのだが、ヒントに沿って考えれば自然に出てくる条件なので、この条件のみを正解とした。

(2) R に対する条件を補った上で、論理式の構成に関する帰納法によって (*) を示せ。

(1) ができていなくとも、帰納法の体裁があれば、10 点とした。

4. 次の論理式の関して以下の問に答えよ。

$$(\forall x.\forall y.\forall z.\ Q(x,y) \wedge Q(y,z) \supset Q(x,z)) \wedge Q(c,c) \wedge (\forall x.\exists y.\ \neg Q(y,x) \wedge Q(x,y))$$

(1) 上の論理式を Skolem 化せよ。
(2) Skolem 化した結果を充足する Herbrand 解釈を求めよ。

Herbrand 解釈でない解釈を与える答が多かった。Herbrand 解釈とは、Herbrand 領域を領域とする解釈である。f を Skolem 関数とするとき、Herbrand 領域は

$$\mathbf{H} \ = \ \{f^n(c) \mid n \geq 0\}$$

となる。Q の解釈は、$\langle f^m(c), f^n(c)\rangle$ に対して、$m \leq n$ ならば $\top$ を、$m < n$ ならば $\perp$ を与えればよい。(それ以外の解釈も有り得る。)

(3) 上の論理式を充足する解釈で、領域が有限のものは存在するか。存在するならば、それを与えよ。存在しないならば、存在しないことを示せ。

上の論理式を充足する任意の解釈 I に対して、領域の適当な要素 u_0 をとる。上の論理式の最後の条件より、$i \geq 0$ に対して $I(Q)(u_i, u_{i+1}) = \top$ かつ $I(Q)(u_{i+1}, u_i) = \perp$ を満たす要素の列 $u_0, u_1, u_2, \cdots$ が存在する。ここで $j \leq i < i+1$ かつ $u_{i+1} = u_j$ が成り立つと仮定する。$I(Q)(u_{i+1}, u_i) = \perp$ より $j = i$ (すなわち $u_{i+1} = u_i$) ではない。従って $j < i$。最初の条件より Q の推移性が成り立つので、$I(Q)(u_j, u_i) = \top$ が導かれる。これは $I(Q)(u_{i+1}, u_i) = \perp$ に矛盾。従って、$u_0, u_1, u_2, \cdots$ は相異なる要素の無限列になり、領域は無限集合でなければならない。

5. 次の問に答えよ。
(1) 自然数 x が素数ならば 0、そうでなければ 1 を返す関数は原始帰納的であることを簡単に説明せよ。

有界最小化を使うのが簡単であるが、再帰的な定義も可能。例えば

$$\begin{array}{rcl} prime(x) & = & p(x-2,x) \\ p(0,y) & = & 0 \\ p(S(x),y) & = & \textbf{if } y \textbf{ mod } S(S(x)) = 0 \textbf{ then } 1 \textbf{ else } p(x,y) \end{array}$$

$-$ (正確には monus) および **mod** および **if then else** も原始帰納的関数として定義可能。

(2) この関数を表現する一階算術の論理式を与えよ。ただし、記号としては $=, <, 0, S, +, \times$ および一階述語論理の論理記号 $\neg, \wedge, \vee, \supset, \forall, \exists$ のみを用いる。

y を返り値を表すとして、例えば以下のよう。

$$((\exists v.\exists w.\ S(0) < v \wedge v < x \wedge x = v \times w) \supset y = S(0)) \ \wedge$$
$$(\neg(\exists v.\exists w.\ S(0) < v \wedge v < x \wedge x = v \times w) \supset y = 0)$$

返り値を変数で表していない人が多かった。5 点。

6. 領域を自然数全体とし、述語記号 $=, <$ と定数記号 0 と関数記号 $S, +$ に加えて、述語記号 $P(t,q)$, $Q(t,x)$, $R(t,x,y)$ を持つ算術の体系を考える。$P(t,q)$ はある決定性の Turing 機械の時刻 t における状態が q であることを表し、$Q(t,x)$ は時刻 t のヘッドの位置が x であることを表し、$R(t,x,s)$ は時刻 t のテープの位置 x における記号が s であることを表す。
(1) 状態 q においてヘッド上の記号が s のときに、ヘッド上に記号 s' を書き込み、ヘッドを右に移動して状態 q' に遷移するという規則を論理式で表せ。

例えば以下のような論理式 (ただし、すべての自由変数は $\forall$ で縛る)。

$$\begin{array}{l} P(t,q) \wedge Q(t,x) \wedge R(t,x,s) \supset \\ P(S(t),q') \wedge Q(S(t),S(x)) \wedge R(S(t),x,s') \wedge \\ (\forall y.\forall v.\ \neg(y = x) \wedge R(t,y,v) \supset R(S(t),y,v)) \end{array}$$

$\forall y.\forall v.\ \neg(y = x) \wedge R(t,y,v) \supset R(S(t),y,v)$ のような条件はなくてもよいとした。また、$R(S(t),x,s')$ は $R(S(t),S(x),s')$ でもよい (解釈の問題)。

なお、状態、ヘッドの位置、記号の一意性も必要である。

$$\begin{array}{l} P(t,q) \wedge P(t,q') \supset q = q' \\ Q(t,x) \wedge Q(t,x') \supset x = x' \\ R(t,x,s) \wedge R(t,x,s') \supset s = s' \end{array}$$

(2) 領域は自然数全体とし、記号 $=, <, 0, S, +$ は標準的に解釈するとき、与えられた論理式 A が充足可能かどうかは一般には判定できないことを説明せよ。

やはり、この問題は曖昧であったため、色々な解答があった。満点はいない。こちらが期待した解答は以下のようなものである。

> 一つの決定性の Turing 機械の各規則は、上のような論理式によって表現することができる。時刻 0 の初期状況も論理式によって表現できるので、これらの連言を A として停止状態を q_h とすると、その Turing 機械が初期状況から走り始めたときに停止することと、$A \wedge (\exists t.\ P(t, q_h))$ という論理式が (問の意味で) 充足可能であることとが同値になる。Turing 機械の停止性は判定できないので、与えれた論理式が充足可能かどうかも判定できない。

何か書いてあれば 5 点 (おまけ含む)。(1) との関連に触れていれば 10 点とした。さらに、本質的なポイントが分かっていそうな場合は 15 点。なお、体系は $\times$ を持っていないので、Kleene の述語を持ち出すのは妥当でない。

7. 次のことを簡単に (数行で) 説明せよ。

(1) Zorn の定理から命題論理のコンパクト性が導かれる。

与えられた論理式集合 Γ の部分集合の極限を求めるのではない (5 点減点)。Γ を含む無矛盾集合の極限 (極大なもの) を求める。

(2) 一階述語論理のコンパクト性と弱い完全性から強い完全性が導かれる。

強い完全性を知らない人が多いようだ。

(3) 原始帰納的関数は有界の最小化に関して閉じている。

「閉じている」を誤解した人が多かった。質問してもらったらよかったのに。

(4) 自然数の集合 X とその補集合がともに帰納的に可算ならば、X は帰納的である。